ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА"
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Под редакцией *Г. П. Акилова*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск, 1977

УДК 517.948:513.8+519.4

Сборник содержит обзоры ряда актуальных направлений современного функционального анализа. Особое внимание уделено геометрическим вопросам линейных топологических и упорядоченных векторных пространств, приложениям аналитических методов к линейным дифференциальным операторам, спектральной теории операторов и многим другим вопросам. В основу сборника положены материалы, представленные ведущими аналитиками в Школе по теории операторов в функциональных пространствах (лето 1975 г., Новосибирский академгородок).

Книга адресована широкому кругу специалистов в области функционального анализа и его приложений. Сборник доступен студентам старших курсов математических факультетов и будет полезен научным работникам и аспирантам, специализирующимся в области теории операторов в функциональных пространствах.

Т $\frac{20203-871}{055(02)-77}$ БЗ—57—14—77

ОТ РЕДАКТОРА

В настоящее время слова «функциональный анализ» не имеют однозначного истолкования. Среди точек зрения на функциональный анализ встречаются самые разнообразные, в том числе и такие, проникнутые детской самоуверенностью: «Функциональный анализ — это только то, что непосредственно связано с дифференциальными уравнениями (с частными производными.— Г. А.)». Тем не менее многие видные специалисты считают, что в сфере влияния функционального анализа находится не только теория дифференциальных уравнений, но в той или иной мере и вся непрерывная математика. Более точно эту мысль можно выразить, сказав, что функциональный анализ — это язык непрерывной математики. И действительно, можно ли, например, представить себе теорию дифференцируемых многообразий, изложенную без понятия модуля; можно ли достаточно отчетливо определить, что есть мероморфная функция нескольких комплексных переменных, не имея в активном словаре понятия пучка; вычислительная математика в той ее части, которая относится к методам численного решения, немыслима без использования аппарата функционального анализа. На языке функционального анализа говорят (хотя, бывает, и не ведая того, что сказано) представители таких дисциплин, как теория упругости и пластичности, гидро- и аэродинамика и, конечно же, теоретическая физика, причем не только в связи с дифференциальными уравнениями — это уже никого не удивляет,— но и в таких, казалось бы, сугубо дискретных областях, как теория элементарных частиц, теория дислокаций в средах с микроструктурой с успехом используются методы функционального анализа (гильбертово пространство, обобщенные функции). Особо следует выделить математическую экономику, которая и возникла, и оформилась в самостоятельную дисциплину в недрах функционального анализа трудами крупнейших его представителей.

Годом рождения функционального анализа считается 1932 г., когда вышла в свет всем известная монография Стефана Банаха. Также всем известно, что многие конкретные факты, вошедшие затем в золотой фонд функционального анализа, были обнаружены задолго до появления упомянутой книги. Тем не менее, повторяю, функциональный анализ возник одновременно с «Théorie des opérations linéaires», потому что именно в этой книге был создан новый язык, была разработана новая идеология. Как раз поэтому книга не получила (и не могла получить) одобрения корифеев того времени: ведь она была посвящена в основном истолкованию хорошо им известных фактов. По этой же причине концепция Банаха нашла полнозвучный отклик в умах молодых математиков — их тезаурус не был отягощен устоявшимися стереотипами, что и открыло для них возможность оценить значение новых идей, подхватить их и вознести на ту высоту, на которой они находятся сейчас. Не пытаясь перечислить имена всех этих математиков, отмечу все же, что в Советском Союзе это в первую очередь (в порядке алфавита) И. М. Гельфанд, Л. В. Канторович, М. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, М. Г. Крейн, С. Л. Соболев. Усилиями этих и многих других, не названных здесь математиков авторитет функционального анализа возрос необыкновенно.

Хотя нередко значение того или иного раздела науки оценивают по его приложениям к другим областям, не следует забывать, что сами эти приложения оказываются возможными лишь постольку, поскольку поставлены и решаются внутренние проблемы данного раздела. Более того, внутреннее развитие существенно опережает развитие приложений. Примеры, иллюстрирующие справедливость этого соображения, имеются в избытке даже в газетных статьях. Поэтому ограничусь лишь одним, непосредственно относящимся к нашей теме. Выдвинутая А. Н. Колмогоровым и Дж. фон Нейманом еще в 30-х годах идея локально выпуклого пространства считалась многими современниками чистой игрой ума. Понадобилось двадцать лет, чтобы эта идея начала работать. В этой связи хочется отметить полную несостоятельность попыток поставить во главе функционального анализа какую-либо область его приложений. Нельзя ставить телегу перед лошадью[1].

Изложенная концепция функционального анализа была господствующей при организации и проведении Школы по теории операторов в функциональных пространствах (Новосибирск. Август 1975 г.), избранные труды которой и предлагаются вниманию читателей. При отборе материала мы в первую очередь руководствовались указанными принципами. В книге совершенно недостаточно представлены дифференциальные операторы и почти отсутствуют работы по приложениям функционального анализа в вычислительной математике, хотя оба эти направления занимали подобающее им место в упомянутой школе. Это не следует понимать как принижение роли указанных разделов. Скорее, наоборот, мы считаем, что они заслуживают значительно более полного освещения, чем это возможно в рамках данной книги.

[1] Из этого, разумеется, не следует, что лошадь важнее телеги. Установление иерархии в подобных ситуациях — занятие в высшей степени бесплодное.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Г. П. Акилов, С. С. Кутателадзе

Теория упорядоченных векторных пространств, вступившая в свое пятое десятилетие, занимает достойное место в здании функционального анализа. Разумность концепций, положенных в ее основу, многообразие разветвлений, глубина и простота понятий и результатов, наконец, наличие естественных порядков во многих классических пространствах — объектах анализа делают эту теорию жизненной. В то же время взаимодействие теории упорядоченных векторных пространств с другими разделами функционального анализа далеко не всегда отвечает реальным потребностям в нем. С нашей точки зрения, последние годы характеризуются упрочением и углублением связей различных разделов анализа. Этот процесс заметен и в области упорядоченных пространств. Подчеркнуть некоторые из таких связей, наметить возникающие перспективы — вот цель настоящего обсуждения.

Разумеется, последующий текст ни в коей мере не претендует на полноту и в большинстве случаев на оригинальность. Оригинальное и полное раскрытие избранной нами темы вряд ли вообще возможно. Здесь мы ограничиваемся лишь немногими из задач, входящих в последнее время в круг наших личных интересов. При этом основное внимание мы старались уделить качественной стороне дела. Этим объясняются незначительное число формальных рассуждений и сознательная тривиализация примеров.

1. Проблема продолжения. Одними из самых первых и ярких приложений теории упорядоченных векторных пространств к задачам классического анализа в банаховых пространствах явились результаты о роли структуры порядка в проблеме продолжения **линейных операторов.**

Исследования в этом направлении интенсивно ведутся и в последние годы. Такое положение связано с фундаментальной ролью теоремы Хана — Банаха — одного из основных принципов современного линейного анализа.

Напомним, что при рассмотрении операторов, в отличие от функционалов, две основные формы теоремы Хана — Банаха: теорема о мажорируемом продолжении и теорема о продолжении с сохранением нормы,— расслаиваются. Если первая форма теоремы сохраняется для операторов, действующих в произвольные *пространства Канторовича* (K-пространства), то вторая имеет место лишь для специального класса таких пространств — K-пространств ограниченных элементов, т. е. пространств непрерывных функций на экстремальных компактах. Более того, указанные свойства являются характеристическими. Вот формальное описание положения дел.

Теорема 1.1. *Пусть Y — векторное пространство, упорядоченное с помощью конуса K. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Каковы бы ни были векторное пространство X, подпространство X_0 в X, сублинейный оператор $p: X \to Y$ и линейный оператор $T_0: X_0 \to Y$ такой, что $T_0x_0 \leqslant p(x_0)$ для всех $x_0 \in X_0$, существует продолжение $T: X \to Y$ оператора T_0 такое, что $Tx \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.*

(2) *Каковы бы ни были упорядоченное векторное пространство X, мажорирующее подпространство X_0 в X и положительный оператор $T_0: X_0 \to Y$, существует положительное продолжение оператора T_0 на пространство X.*

(3) *Конус K вполне миниэдрален, т. е. каждое ограниченное сверху множество в Y имеет верхнюю грань.*

Утверждение (1) называют *теоремой Хана — Банаха — Канторовича*, а утверждение (2) — *теоремой Канторовича.*

Как ни удивительно, теорема 1.1 в приведенной форме установлена сравнительно недавно. Дело в том, что долгое время не удавалось доказать, что свойство (1) влечет линейную замкнутость конуса K. В предположении же последней теорема 1.1 известна давно и доказывается достаточно просто.

Более ранним и, может быть, более замечательным является следующий факт.

Теорема 1.2. *Для банахова пространства Y эквивалентны утверждения:*

(1) *Y является $\mathscr{P}_1$-пространством, т. е. каково бы ни было банахово пространство X, содержащее Y в качестве подпространства, существует проектор единичной нормы из X на Y.*

(2) *Каковы бы ни были банахово пространство X, подпространство X_0 в X и ограниченный линейный оператор $T_0: X_0 \to Y$, существует линейное продолжение $T: X \to Y$ оператора T_0 такое, что $\|T\| = \|T_0\|$.*

(3) *Y является K-пространством ограниченных элементов (со стандартной нормировкой).*

(4) *Каждое семейство попарно пересекающихся шаров в Y имеет не пустое пересечение.*

Самое значительное достижение последнего времени в проблеме продолжения линейных операторов, безусловно, представляет следующая *теорема Линденштраусса.*

Теорема 1.3. *Для банахова пространства Y следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Сопряженное пространство Y' изометрично пространству $L^1(\mu)$ для некоторой меры μ.*

(2) *Второе сопряженное пространство Y'' является K-пространством ограниченных элементов.*

(3) *Каковы бы ни были банаховы пространства X, содержащее Y, и Z и компактный оператор $T_0: Y \to Z$, существует компактное продолжение $T: X \to Z$, для которого $\|T\| = \|T_0\|$.*

(4) *Каковы бы ни были число $\varepsilon > 0$, банахово пространство X, его подпространство X_0 и компактный оператор $T_0: X_0 \to Y$, существует компактное продолжение $T: X \to Y$ такое, что $\|T\| \leqslant (1+\varepsilon)\|T_0\|$.*

(5) *Каждое четырехэлементное семейство попарно пересекающихся шаров в Y имеет не пустое пересечение.*

В связи с этой замечательной теоремой пространства, преддвойственные к $L^1(\mu)$, называются *пространствами Линденштраусса.* Отметим, что теорема 1.3 до сих пор не получила версии в категории упорядоченных пространств. В то же время очевидно, что в классе векторных решеток существует вариант этой теоремы, характеризующий пространства типа M.

Теорема Линденштраусса доставляет много материала для разнообразных размышлений и допускает различные модификации. Отметим здесь только один из недавних результатов Лазара, имеющий любопытный геометрический вид (кстати сказать, и геометрическое доказательство, основанное на использовании *свойства Лима* — наличия достаточного числа непрерывных барицентрических координат у конечномерных многогранников).

Теорема 1.4. *Для банахова пространства Y следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Y — пространство Линденштраусса, конечномерные сечения единичного шара которого многогранны.*

(2) *Каковы бы ни были банахово пространство X, подпространство X_0 в X и компактный оператор $T_0{:}X_0 \to Y$, существует компактное продолжение $T{:}X \to Y$ оператора T_0 такое, что $\|T\| = \|T_0\|$.*

Пространства Линденштраусса в настоящее время исследуются в основном методами теории интегральных представлений выпуклых компактов — методами граничной теории Шоке. Последняя, как отметим ниже, имеет глубокие связи с теорией упорядоченных векторных пространств. Это обстоятельство косвенно свидетельствует в пользу порядкового характера теорем типа Линденштраусса и Лазара.

2. Сублинейные операторы. Факты, приведенные в предыдущем пункте, показывают область применимости операторных аналогов теорем типа Хана — Банаха. Справедливость таких теорем в полном объеме накладывает весьма жесткие требования на класс допускаемых к рассмотрению пространств. В то же время в приложениях имеется целый ряд вопросов, исследование которых требует существенно меньшего, чем общие операторные формы теорем о продолжении. Одним из основных примеров таких вопросов служит теория сублинейных операторов. Интерес к последним не случаен — достаточно отметить здесь ту роль, которую такие операторы играют в метрической теории функций и в теории экономической динамики.

Конкретные классы сублинейных операторов, как правило, имеют своей областью значений упорядоченное пространство, не являющееся, вообще говоря, K-пространством. Более того, такие операторы в силу очевидных причин часто могут быть заданы не на всем рассматриваемом векторном пространстве, а лишь на некотором конусе в нем. Иначе говоря, в приложениях приходится рассматривать как операторы с бесконечными значениями, так и операторы, действующие в общие упорядоченные пространства. Так, модели экономической динамики формально представляют собой сублинейные операторы, определенные на конусе и принимающие значения в K-линеале ограниченных элементов. Таким образом, исследование этих операторов должно основываться на соображениях принципиально иной природы, нежели общие операторные варианты теорем о продолжении.

При изучении сублинейных операторов возникают основные *задачи теории двойственности Минковского*. Именно, требуется выяснить

(а) *условие существования опорного* линейного оператора у заданного сублинейного оператора p;

(б) *условие непустоты субдифференциала*, т. е. условие существования (опорного) оператора A такого, что $Ax \leqslant p(x)$ для всех элементов x из области определения оператора p, и, кроме того, удовлетворяющего соотношению $Ax_0 = p(x_0)$ в заданной точке x_0;

(в) *условие справедливости двойственности Минковского*, т. е. выполнения соотношения $p(x) = \sup\{Ax : A \in \in U_p\}$, где U_p — опорное множество оператора p, иными словами, совокупность всех опорных к p линейных операторов;

(г) *внутренние характеристики множеств* линейных операторов, *служащих опорными множествами* сублинейных операторов данного класса.

Трудность указанных задач не вызывает сомнений — любая информация об общих сублинейных операторах мгновенно может быть трансформирована в разнообразные и зачастую сильные утверждения классического анализа. Несмотря на это, в последние годы предпринимались небезуспешные попытки частичного анализа описанных задач теории сублинейных операторов. Остановимся здесь лишь на некоторых из них.

М. М. Фельдман исследовал ряд случаев, относящихся к задаче (б). Именно он показал, что одномерный вариант теоремы Хана — Банаха — Канторовича справедлив для сублинейных операторов, принимающих значения в так называемых пространствах со свойством цепной полноты. Напомним соответствующее определение.

Говорят, что упорядоченное векторное пространство обладает *свойством цепной полноты*, если любая ограниченная сверху цепь элементов в нем имеет верхнюю грань. Разумеется, что среди K-линеалов свойством цепной полноты обладают только K-пространства. В действительности класс таких пространств существенно более широк. Так, пространство линейных операторов, действующих из упорядоченного векторного пространства в пространство со свойством цепной полноты, также обладает этим свойством (при каноническом упорядочении с помощью конуса положительных операторов). Еще один класс примеров доставляют банаховы пространства с конусом, на котором определен строго монотонный функционал. К последнему типу относится, в частности, пространство ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве с конусом положительно определенных операторов.

К сожалению, свойство цепной полноты не эквивалентно сформулированному в (б) свойству точной аппроксимации. Вопрос о необходимых и достаточных условиях остается здесь открытым.

Новый подход к изучению сублинейных операторов, действующих в K-линеалы ограниченных элементов, предложил Ю. Э. Линке. В частности, им установлено, что ограниченный сублинейный оператор, действующий из сепарабельного банахова пространства X в пространство $C(Q)$, непрерывных на компакте Q функций, допускает представление в виде верхней огибающей опорных линейных операторов (условие (в)). Отметим, что условие (б) в пространстве $C(Q)$, как правило, не выполнено.

Основной предложенный метод исследования сублинейных операторов $p: X \to C(Q)$ состоит в изучении свойств многозначного отображения $\Phi_p: Q \to 2^{X'}$, определенного соотношением $\Phi_p(t) = U_{p_t}$, где $p_t: x \to p(x)(t)$ — сублинейный функционал $\varepsilon_t \circ p$ и U_{p_t} — его опорное множество. На языке отображения Φ_p исследование вопросов теории двойственности для оператора p сводится к изучению специальных селекторов многозначного отображения.

Уместно подчеркнуть, что и теорема Линденштраусса также в известной мере эквивалентна теореме о существовании селекторов многозначных отображений. Однако до сих пор совершенно неясно, как получать указанные результаты без аппелирования к технике сечений — к теоремам типа Майкла и Хасуми. В то же время Ю. Э. Линке показал, как простейшие факты теории упорядоченных векторных пространств можно применять для получения новых теорем о сечениях. В частности, им существенно усилена известная *теорема Тонга* об эквивалентности геометрической симплициальности конуса ограниченных полунепрерывных сверху функций нормальности топологического пространства, служащего областью определения рассматриваемых функций. В качестве примера возникающих здесь нерешенных вопросов отметим задачу (в) для операторов со значениями в упорядоченных пространствах типа M. Здесь указанная задача эквивалентна теореме о существовании специального типа селекторов многозначных отображений.

Что касается задачи (г) о внутренних характеристиках опорных множеств, то здесь почти ничего не известно даже для случая операторов, действующих в K-пространства. Отметим здесь только недавний результат А. М. Рубинова, представляющий интерес в связи с возможностями новых постановок в теории Шоке.

Если K-пространство Y находится в двойственности со своим сопряженным по Накано (т. е. с пространством вполне линейных функционалов на Y), то множество регулярных операторов является опорным к некоторому сублинейному оператору в том и только в том случае, если оно операторно выпукло и замкнуто в некотором достаточно специальном смысле. Напомним, что множество операторов U, действующих в K-пространство Y, называется *операторно выпуклым*, если $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in U$ для любых T_1, $T_2 \in U$ и положительных операторов α_1, $\alpha_2 : Y \to Y$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = E$. Здесь и ниже E — тождественное отображение Y на себя.

3. Конкретные сублинейные операторы. Наряду с исследованием общих свойств сублинейных операторов в духе теории двойственности Минковского существенное значение имеет вычисление в явном виде опорных множеств конкретных сублинейных операторов. Хорошо известна роль аналогичных результатов о строении субдифференциалов выпуклых функций и в особенности выпуклых интегральных функционалов. Эти классические задачи выпуклого анализа являются вариантами соответствующих вопросов для сублинейных операторов. В указанном направлении получены существенные и практически окончательные результаты. Положение дел исчерпывающим образом освещено в работах А. Д. Иоффе и В. Л. Левина, поэтому здесь на таких задачах мы останавливаться не будем. Наша цель при упоминании этих результатов состояла в том, чтобы подчеркнуть ту роль, которую играют хорошо построенные конкретные сублинейные операторы. Роль эта определяется тем, что факт непустоты опорного множества сублинейного оператора — это очень удобная форма чистой теоремы существования. В этой связи становится ясным отсутствие в предыдущем пункте обсуждения задачи (а).

Отметим здесь же теорему Мазура — Орлича, доказательство которой прекрасно иллюстрирует значение построения конкретного сублинейного оператора. Уместно подчеркнуть, что эта теорема незаслуженно не является столь же популярной у потребителей, как (эквивалентная ей) теорема Хана — Банаха — Канторовича.

Полезные конкретные сублинейные операторы возникают при исследовании общих *линейных задач выпуклого анализа*. На одном из таких операторов мы остановимся подробно.

Пусть X — некоторый K-линеал, Y — некоторое K-пространство и $T \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ — положительный линейный оператор, $T: X \to Y$. Сублинейный оператор $\check{T}: X^n \to Y$, действующий из соответствующей степени X по формуле $\check{T}(x_1, \ldots, x_n) = T(x_1 \vee \ldots \vee x_n)$, называется *сверхразбиением* оператора T. Это оправдано тем, что линейный оператор $\hat{T}: X^n \to Y$ опорен к $\check{T}$ в том и только в том случае, если $\hat{T}$ представляет собой *разбиение* оператора T. Последнее означает, что оператор $\hat{T}$ положителен, причем $\hat{T}\Delta = T$ для оператора Δ, вкладывающего X в диагональ пространства X^n.

Теорема 3.1. *Пусть S, $T \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ и H — конус в X^n. Сверхразбиение оператора S мажорирует сверхразбиение оператора T на конусе H в том и только в том случае, если каждое разбиение оператора T мажорируется на этом конусе некоторым разбиением оператора S.*

Этот факт, носящий название *теоремы декомпозиции*, решает основную массовую задачу выпуклого анализа — задачу конструктивного описания упорядоченностей типа Шоке, связанных с конусами функций или множеств. Так, в задачах теории выпуклых поверхностей эта теорема становится в буквальном смысле слова эффективной, превращаясь в утверждение типа леммы Коши о разместимости параллельным переносом одного выпуклого многоугольника в другом. В нашу задачу не входит здесь обсуждение прикладных аспектов теоремы 3.1. Мы сформулируем сейчас ее полезную форму, необходимую при исследовании конкретных функциональных пространств.

Пусть $[\omega_0, \omega_1]$ — отрезок $\{\omega\in\Omega : \omega_0\leqslant\omega\leqslant\omega_1\}$ некоторого вполне упорядоченного множества Ω. Отображение $\omega\to T(\omega)$ множества Ω в некоторое K-пространство называется *согласованным*, если оно возрастает и для всякого предельного трансфинита $\omega\in[\omega_0, \omega_1]$ выполняется $T(\omega)=\sup\{T(\omega') : \omega_0\leqslant\omega'<\omega\}$. Пусть теперь X — некоторый K-линеал, Y — K-пространство, а конус H — верхняя решетка в X. Символом $\succ$ обозначается *упорядоченность Шоке* в конусе $\mathscr{L}_+(X, Y)$, т. е. $S\succ T$ для операторов S и T означает, что $Sh\geqslant Th$ для всех $h\in H$.

Лемма о согласованных разбиениях. *Пусть $\omega\to T(\omega)$ — согласованное семейство операторов из $\mathscr{L}_+(X, Y)$ и оператор $S\in\mathscr{L}_+(X, Y)$ таков, что $S\succ T(\omega_1)$. Тогда существует согласованное семейство $\omega\to S(\omega)$ операторов из $\mathscr{L}_+(X, Y)$ такое, что*

$$S\geqslant S(\omega);\ S(\omega)\succ T(\omega);\ S-S(\omega)\succ T(\omega_1)-T(\omega)$$

для всех $\omega\in[\omega_0, \omega_1]$.

В такой форме теорема декомпозиции оказывается удобной в приложениях. Вот несколько примеров.

Предложение 3.2. *Если правильное подпространство K-пространства дополняемо, то оно и монотонно дополняемо.*

Предложение 3.3. *Положительная форма, определенная на замкнутом подлинеале KB-линеала, допускает положительное продолжение с сохранением нормы.*

Следующее утверждение менее тривиально.

Предложение 3.4. *Пусть X — некоторый K-линеал, Y — некоторое K-пространство и $T\in\mathscr{L}_+(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *T — решеточный гомоморфизм X в Y;*

(2) *для всякого оператора T' такого, что $0\leqslant T'\leqslant T$, существует оператор $\alpha: Y\to Y$ такой, что $0\leqslant\alpha\leqslant E$, для которого $T'=\alpha T$.*

В связи с последним предложением, а также с указанным в предыдущем пункте описанием опорных множеств сублинейных операторов возникают весьма интригующие (и, очевидно, очень нетривиальные) задачи о нахождении теорем типа Крейна — Мильмана для множеств операторов, в которых в роли скаляров выступают операторы α, для которых $0\leqslant\alpha\leqslant E$. Напомним в этой связи, что в случае $Y=R$ в предложении 3.4 речь идет о крайних лучах конуса положительных форм.

Существует и еще один комплекс задач, связанный с исследованием конкретных сублинейных операторов.

4. Правильные подпространства и пространства Гротендика. Рассмотрим некоторое правильное подпространство X_0 в K-пространстве X. Из простейших алгебраических соображений следует, что X_0 можно представлять себе как пространство кусочно-постоянных функций в соответствующей функциональной реализации. Таким образом, указанные подпространства устроены достаточно просто и обозримо. В то же время, как ни удивительно, такие подпространства играют существенную роль в геометрической теории классических банаховых пространств.

Теорема 4.1. *KB-линеал X обладает тем свойством, что каждый его замкнутый подлинеал является областью значений проектора с единичной нормой, в том и только в том случае, если X с точностью до изометрии есть одно из пространств $c_0(\Gamma)$ или $L^p(\mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$.*

Существует и изоморфная версия этого результата.

Теорема 4.2. *KB-линеал X изоморфен одному из пространств $c_0(\Gamma)$ или $L^p(\mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$, в том и только в том случае, если любой его замкнутый подлинеал дополняем.*

Эти сравнительно недавние результаты делают естественным вопрос об описании дополняемых правильных подпространств в произвольных K-пространствах. К сожалению, продвижения к решению этого вопроса (принадлежащего Х. Шеферу) сравнительно незначительны.

К указанному вопросу тесно примыкает задача о строении дополняемых пространств Гротендика, представляющих собой в известном смысле пространства кусочно-постоянных нечетных функций.

Точнее, подпространство X_0 в K-линеале X называется *пространством Гротендика*, если для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X_0$ выполняется $x_1 \vee x_2 \vee 0 + x_1 \wedge x_2 \wedge 0 \in X_0$. Такие пространства были введены Гротендиком в случае $X = C(Q)$, как примеры не решеточных пространств Линденштраусса. При этом определение Гротендика состояло в явном указании поляры к X_0. Эквивалентность исходного определения Гротендика в $C(Q)$ приведенному установлена Линденштрауссом и Вулбертом.

Если K-линеал X — архимедов и подпространство X_0 является замкнутым относительно сходимости с регулятором, то, как легко видеть, для любого конечного множества A в X_0 выполняется $\sup A + \inf A \in X_0$. Последнее соотношение позволяет установить явные связи подлинеалов и пространств Гротендика. В то же время прямого и простого доказательства эквивалентности приведенных определений нет. Найти его — это задача Линденштраусса. Отметим, что до сих пор не известно, существует ли комбинаторное тождество, выражающее $\sup A + \inf A$ через аналогичные характеристики подмножеств A. Можно показать, что поставленные вопросы легко сводятся к исследованию конкретных сублинейных операторов (определенных на всем пространстве), что позволяет оптимистически смотреть на перспективы их решения.

5. Варианты граничной теории Шоке. Значительные возможности приложений и новых постановок доставляет граничная теория Шоке. Мы наметим здесь наиболее общую схему построения этой теории.

Пусть X — некоторый K-линеал, а Y — некоторое K-пространство. Будем считать все встречающиеся упорядоченные пространства регулярно упорядоченными. В пространстве X фиксируется некоторый конус H_0, являющийся верхней решеткой. Символом $\succ$ обозначим упорядоченность Шоке, связанную с конусом H_0. Оператор $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ называется *согласованным* (относительно конуса H в X), если для всякого оператора $T' \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ такого, что $T' \succ |T|$, выполняется $T'h \geqslant |T|h$ для всех $h \in H$. Множество всех согласованных операторов обозначается $\mathfrak{B}_H(Y)$. В случае, когда $H = X$, согласованные операторы называются *максимальными*. Максимальные операторы представляют собой наиболее подробно изученный класс согласованных операторов.

Предложение 5.1. *На конусе H_0 существуют согласованные относительно конуса H операторы со значениями в некотором (а тогда и в любом) регулярно упорядоченном K-пространстве в том и только в том случае, если $\overline{H_0 + X_+} \supset H$.*

Ниже всегда предполагается, что указанное этим предложением соотношение на конусы H_0 и H выполнено. Из леммы о согласованных разбиениях следует

Теорема 5.2. *Множество $\mathfrak{B}_H(Y)$ представляет собой компоненту в K-пространстве регулярных операторов $\mathscr{L}(X, Y)$.*

Эта теорема устанавливает K-пространственный характер теории Шоке. Действительно, основная задача этой теории состоит в описании множества $\mathfrak{B}_H(Y)$. Идея метода границ состоит в замене условия „оператор согласован“ условием „оператор обращается в нуль вне некоторой границы“. Иными словами, речь идет об аппроксимации компоненты согласованных операторов компонентами простейшего типа — компонентами, порожденными проекторами в области определения рассматриваемых операторов. К сожалению, даже если X является K-пространством, таких компонент недостаточно для описания базы пространства операторов. В то же время существует некоторая естественная аппроксимационная процедура, описывающая важные классы операторов. Наметим эту процедуру.

Фиксируем некоторое K-пространство Z и способ $T_0 \in \mathscr{L}_+(X, Z)$ вложения X в Z. Оператор $T \in \mathscr{L}_+(Z, Y)$ называется *T_0-согласованным* (относительно конуса H в X), если $TT_0 \in \mathfrak{B}_H(Y)$. Оказывается, что в множестве T_0-согласованных (K-пространственных) проекторов в Z существует наибольший элемент. Этот элемент называется *проектором Шоке*, а компонента $\mathrm{Ch}_H(T_0)$, служащая областью значений указанного проектора, называется *компонентой Шоке* или *границей Шоке*.

Теорема 5.3. *Сужение T_0-согласованного оператора на дизъюнктное дополнение границы Шоке анормально. При этом* $\mathrm{Ch}_H(T_0)$ *совпадает с дизъюнктным дополнением общей части ядер всех T_0-согласованных операторов.*

Этот алгебраический факт исчерпывает вопрос об описании вполне линейных согласованных операторов. В то же время задача полного описания произвольных согласованных операторов далека от завершения. Необходимость исследования этой задачи очевидна. Достаточно сказать, что примерами согласованных операторов служат обычные границы Шоке, экстремальные подмножества выпуклого множества, меры, сосредоточенные на гранях конуса в смысле Мейе, общие операторы Дирихле (в частности, интеграл Пуассона и обобщенное решение задачи Дирихле) и т. п. Этот список, конечно, неполон — легко понять, что в некотором смысле любой оператор является соответствующим способом согласованным. Однако перечисленные случаи дают примеры задач, в которых интерес представляют исключительно *граничные свойства* — расположение ядра относительно соответствующей границы Шоке. Мы проиллюстрируем последнее положение примером одного интересного класса операторов.

Оператор $T \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ называется *экстремальным*, если для всякого $S \in \mathscr{L}_+(X, Y)$ такого, что $S > T$, выполняется $N(S) \supset N(T)$, где $N(T) = \{x \in X : T|x| = 0\}$ — нулевая решетка T.

Из леммы о согласованных разбиениях вытекает, что экстремальные операторы заполняют правильный вверх конус в K-пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$. Однако нормальным множеством этот конус, как правило, не бывает. В то же время эти операторы, представляющие существенный интерес в ряде задач анализа, оказываются возможным исследовать с помощью соответствующего варианта граничной теории. Достаточно заметить, что оператор T является экстремальным в том и только в том случае, если T согласован относительно конуса $N(T)$. Применяя теорему 5.3, получаем следующие граничные свойства.

Теорема 5.4. *Справедливы утверждения*:

(1) *Сужение T_0-экстремального оператора T на дизъюнктное дополнение границы Шоке* $\mathrm{Ch}_{N(TT_0)}(T_0)$ *анормально.*

(2) *Проектор на компоненту* $\mathrm{Ch}_{N(TT_0)}(T)$ *является T_0-экстремальным для всякого вполне линейного T_0-экстремального оператора T.*

(3) *Если конус H_0 коинициален X, то оператор является T_0-экстремальным в том и только в том случае, если T_0-экстремален проектор на компоненту его существенной положительности.*

Большое значение для приложений имеет перенесение приведенных результатов на случай произвольных положительных операторов. К сожалению, в последнем направлении результаты за редкими исключениями отсутствуют. Более того, в исключительных случаях используется исключительная техника. Такое положение, разумеется, связано с отсутствием в настоящее время детальной информации о строении базы пространства операторов. Вот один из простейших вопросов, ответ на который нам не известен.

Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — полные булевы алгебры, Q_1 и Q_2 — их стоуновские компакты и $\mathfrak{B}$ — булева алгебра компонент K-пространства регулярных операторов $\mathscr{L}(C(Q_1), C(Q_2))$. Как явно построить $\mathfrak{B}$, зная $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$?

Представляется, что анализ подобных вопросов (в том числе нахождение реализационных теорем для K-пространств, служащих пространствами операторов между заданными парами классических банаховых пространств) окажется плодотворным.

6. Литературные указания. Формализованное изложение затронутых нами вопросов и источники, необходимые для дальнейшего чтения, можно найти в [1—7].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959. 684 с.
2. **Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.— Л., ГИТТЛ, 1950. 548 с.
3. **Lindenstrauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces. B.—H.—N. Y., Springer, 1973. 243 p.
4. **Lacey E.** The isometric theory of classical Banach spaces. B.—H.— N. Y., Springer, 1974. 270 p.
5. **Schaefer H.** Banach lattices and positive operators. B.—H.—N. Y., Springer, 1974. 376 p.
6. **Кутателадзе С. С.** Границы Шоке в *K*-пространствах.— «Успехи мат. наук», 1975, т. 30, № 4, с. 107—146.
7. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск, «Наука», 1976. 252 с.

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

Ю. М. Березанский, Ю. С. Самойленко, Г. Ф. Ус

В последние годы во многом благодаря проблематике квантовой теории поля значительно возрос интерес к построению анализа функций, зависящих от бесконечного числа переменных, к изучению операторов, действующих в пространствах таких функций, и т. п. При построении такого анализа возникают существенные трудности, связанные с отсутствием в $R^\infty = R^1 \times R^1 \times \ldots$ инвариантной меры типа меры Лебега, с необходимостью следить за поведением функций в „направлении возрастания количества переменных", с отсутствием стандартной топологизации пространства изменения бесконечномерного аргумента и т. д.

Единого способа преодоления этих трудностей, по-видимому, не существует, и здесь приходится создавать те или иные конструкции в зависимости от характера рассматриваемых задач, при этом само понятие „функция бесконечного числа переменных" часто меняется в зависимости от задачи. Так, во многих работах рассматриваются операторы, действующие в пространствах функций, аргумент которых меняется по некоторому банахову или гильбертову пространству. Близкая точка зрения развивалась некоторыми авторами при изучении операторов типа Лапласа — Леви, при этом изучались специальные пространства функций, плохо аппроксимирующихся цилиндрическими. В ряде работ подробно изучались дифференциальные и псевдодифференциальные операторы с бесконечным числом переменных в пространствах функций, равномерно приближаемых цилиндрическими на ограниченных множествах.

Большой цикл работ посвящен построению теории обобщенных функций бесконечного числа переменных на основе идеи замены пространства основных функций на пространство дифференцируемых мер (в этом случае для задания двойственности не нужна стандартная мера типа меры Лебега).

В этой статье дан обзор результатов авторов и некоторых других математиков по спектральной теории самосопряженных операторов, действующих в пространствах функций бесконечного числа переменных. Эти пространства мы всегда понимаем как бесконечные тензорные произведения пространств функций одной переменной (с возможным последующим отождествлением). Такая точка зрения, с одной стороны, удобна для спектральной теории, с другой — она обычно встречается в соответствующих работах по теории поля, статистической физике и т. п.

В § 1 рассматривается в общем виде вопрос о построении разложений по обобщенным собственным векторам бесконечных семейств коммутирующих самосопряженных операторов; при помощи этих операторов конструируются операторы, действующие на функции бесконечного числа переменных примерно так же, как дифференциальный оператор с частными производными строится по операторам $\frac{\partial}{\partial x_n}$. В § 2, 3 конструируются и изучаются пространства функций бесконечного числа переменных как бесконечные тензорные произведения; при этом рассматриваются ядерные оснащения исходного пространства, т. е. пространства основных и обобщенных функций. В § 4—7 описываются применения развиваемой теории к операторам с разделяющимися переменными и их возмущениям, к положительно определенным функциям бесконечного числа переменных и к обобщенной проблеме моментов.

Отметим еще, что рассмотрению близких вопросов посвящен обзор [1].

§ 1. Разложение по совместным обобщенным собственным векторам семейства коммутирующих самосопряженных операторов

1°. При разложении по обобщенным собственным векторам коммутативных семейств самосопряженных операторов наряду с их совместной диагонализацией (см. [2—4] и библиографию в этих книгах) для вопросов, рассматриваемых в этой статье, естествен и удобен другой подход, основанный на предварительном построении их совместного разложения единицы; он был предложен Ю. М. Березанским в [5, 6], см. также К. Морен [7].

Пусть H_0 — гильбертово пространство, в котором действуют самосопряженные, вообще говоря, неограниченные операторы A_x с областями определения $\mathfrak{D}(A_x)$ и разложениями единицы E_x; x пробегает некоторое произвольное множество индексов X. Операторы A_x попарно коммутируют, т. е. коммутируют любые два оператора $E_{x'}(\Delta')$ и $E_{x''}(\Delta'')$. При помощи теоремы А. Н. Колмогорова о продолжении вероятностной меры с цилиндрических множеств нетрудно доказать, что можно построить бесконечное произведение E операторнозначных мер $E_x(x\in X)$, которое и называется совместным разложением единицы семейства $(A_x)_{x\in X}$. Точнее, пусть $\boldsymbol{R}(X)=\boldsymbol{R}^X$ — совокупность всех вещественнозначных функций $X\ni x\mapsto\lambda(x)\in\boldsymbol{R}^1$, $Ц_\sigma(\boldsymbol{R}(X))$ — σ-алгебра, натянутая на цилиндрические множества из $\boldsymbol{R}(X)$, т. е. множества $Ц(x_1, \ldots, x_p; \Delta)=$ $=\{\lambda(\cdot)\in\boldsymbol{R}(X) \mid (\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_p))\in\Delta\}$, где Δ — борелевское множество из $\boldsymbol{R}^p$, а $x_1, \ldots, x_p$ — различные точки из $X(p=1, 2, \ldots)$. Тогда существует разложение единицы $Ц_\sigma(\boldsymbol{R}(X))\ni B\mapsto E(B)$ такое, что $E\left(Ц\left(x_1, \ldots, x_p; \mathop{\times}\limits_{n=1}^{p}\Delta_n\right)\right)=$ $=\prod\limits_{n=1}^{p}E_{x_n}(\Delta_n)$ при любых x_n, Δ_n и p. Справедливо равенство

$$A_x=\int\limits_{\boldsymbol{R}(X)}\lambda(x)\,dE(\lambda(\cdot)) \quad (x\in X), \tag{1.1}$$

где интегрируется функция $\boldsymbol{R}(X)\ni\lambda(\cdot)\mapsto\lambda(x)\in\boldsymbol{R}^1$ относительно меры E. Если семейство $(A_x)_{x\in X}$ состоит всего из одного оператора, то $\boldsymbol{R}(X)=\boldsymbol{R}^1$ и формула (1.1) переходит в обычное соотношение.

2°. Если H_0 конечномерно, а X состоит из конечного числа точек, то $E(B)=\sum\limits_{\lambda(\cdot)\in B}P(\lambda(\cdot))$, где $P(\lambda(\cdot))$ — ортогональный проектор в H_0 на подпространство совместных собственных векторов $\varphi(\lambda(\cdot))$ семейства $(A_x)_{x\in X}$, отвечающих собственному значению $\lambda(\cdot)$, т. е.

$$A_x\varphi(\lambda(\cdot))=\lambda(x)\varphi(\lambda(\cdot)) \quad (x\in X). \tag{1.2}$$

Эта формула может быть распространена на общий случай, если только H_0 сепарабельно. С этой целью рассмотрим оснащение

$$\Phi' \supseteq H_0 \supseteq \Phi, \tag{1.3}$$

где Φ — ядерное пространство, а Φ' — сопряженное к нему пространство антилинейных функционалов; пусть $O:\Phi \to H_0$, $O^+:H_0 \to \Phi'$ — операторы вложения. Тогда существует скалярная неотрицательная конечная мера $Ц_\sigma(\boldsymbol{R}(X)) \ni B \to \rho(B) \geqslant 0$ (спектральная мера семейства) такая, что E и ρ абсолютно непрерывны одна относительно другой и справедливо представление (равенство Парсеваля)

$$O^+E(B)O = \int_B P(\lambda(\cdot))\,d\rho(\lambda(\cdot)) \; (B \in Ц_\sigma(\boldsymbol{R}(X))). \tag{1.4}$$

Здесь $P(\lambda(\cdot))$ — определенная ρ-почти для всех $\lambda(\cdot) \in \boldsymbol{R}(X)$ функция, значениями которой служат непрерывные неотрицательные (относительно $(\cdot,\cdot)_{H_0}$) операторы из Φ в Φ'. Оператор $P(\lambda(\cdot))$ носит название оператора обобщенного проектирования.

В действительности справедлив более точный результат, когда цепочка (1.3) заменяется цепочкой

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+, \tag{1.5}$$

где H_+ и H_- — гильбертовы пространства с позитивной и негативной нормами, а вложение $O:H_+ \to H_0$ квазиядерно. Теперь $\rho(B) = \text{Сл.}(O^+E(B)O)$, операторы $P(\lambda(\cdot))$ действуют из H_+ в H_- и Сл. $(P(\lambda(\cdot))) = 1$.

3°. Подобно конечномерному случаю доказывается, что оператор $P(\lambda(\cdot))$ в некотором смысле «проектирует» на обобщенные собственные векторы, отвечающие собственному значению $\lambda(\cdot)$. Именно область значений $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot)))$, по существу, ρ-почти для каждого $\lambda(\cdot) \in \boldsymbol{R}(X)$ состоит из векторов $\varphi(\lambda(\cdot)) \in \Phi'$, для которых выполняется равенство (1.2), понимаемое в смысле обобщенных функций (при этом требуется, чтобы $\bigcap_{x \in X} \mathfrak{D}(A_x) \supseteq \Phi$ и сужения $A_x|\Phi$ действовали непрерывно из Φ в Φ). Аналогичная ситуация имеет место и в случае применения цепочки (1.5).

Сформулированный результат достаточно просто доказывается в случае, когда X не более чем счетно [5, 6];

для X произвольной мощности этот факт удалось доказать Ю. М. Березанскому [8] лишь недавно. В [8] также показано, что если семейство $(A_x)_{x\in X}$ обладает дополнительными топологическими или алгебраическими свойствами, то меры E и ρ сосредоточены на более узких, чем все $\boldsymbol{R}(X)$, множествах. Например, если X — топологическое пространство и операторы A_x зависят от x в некотором смысле непрерывно, то эти меры сосредоточены на непрерывных на X функциях; если X — линейное топологическое пространство и A_x линейны по x, то на сопряженном пространстве $X^*\subseteq\boldsymbol{R}(X)$, и т. д. Формулы (1.1) и (1.4) при этом должным образом трансформируются. Подобные результаты справедливы и для семейств коммутирующих нормальных операторов.

§ 2. Бесконечные тензорные произведения гильбертовых пространств

1°. Пусть $H_1, H_2, \ldots$ — сепарабельные гильбертовы пространства, $e^{(n)}\in H_n$ — фиксированные орты. Бесконечным тензорным произведением этих пространств $\mathscr{H}=\bigotimes\limits_{n=1;e}^{\infty} H_n$ со стабилизирующей последовательностью $e=(e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ будем называть пространство, которое строится следующим образом.

Выберем в каждом H_n ортонормированный базис $(e_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$ такой, что $e_1^{(n)}=e^{(n)}$, и образуем формальное произведение $e_\alpha=e_{\alpha_1}^{(1)}\otimes e_{\alpha_2}^{(2)}\otimes\ldots\ (\alpha=(\alpha_j)_{j=1}^{\infty})$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots=1, 2, \ldots$, причем, начиная с некоторого номера $\nu(\alpha)$ $\alpha_{\nu(\alpha)+1}=\alpha_{\nu(\alpha)+2}=\ldots=1$. Пусть A — счетное множество всех векторных индексов описанного вида. Примем $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ в качестве ортонормированного базиса строящегося пространства $\mathscr{H}$. (Ясно, что это построение совпадает с конструкцией сепарабельного подпространства полного неймановского произведения пространств H_n).

Простой пример такого построения: пусть $H_n=L_2(\boldsymbol{R}^1, d\mu_n(x_n))$, где $\mu_n(\boldsymbol{R}^1)=1$, $e^{(n)}(x_n)\equiv 1\ (n=1,2,\ldots)$. В этом случае пространство $\bigotimes\limits_{n=1;1}^{\infty} H_n=L_2\ (\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^1\times\ldots, d\mu_1(x_1)\otimes d\mu_2(x_2)\otimes\ldots)=L_2(\boldsymbol{R}^\infty, d\mu(x))$.

2°. Рассмотрим две последовательности $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ гильбертовых пространств таких, что $H_n \subseteq G_n$ и вложение $O_n: H_n \to G_n$ квазиядерно; известно также, что при каждом $n=1, 2, \ldots$ существует такой вектор $e^{(n)} \in H_n$, что $\|e^{(n)}\|_{H_n} = \|e^{(n)}\|_{G_n} = 1$ (заметим, что сейчас $\|O_n\| = 1 < |O_n|$). Построим пространства $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n$ и $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n$. Легко показать, что $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n \subseteq \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n$ и что это вложение квазиядерно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|O_n|^2 - 1) < \infty. \tag{2.1}$$

Если же это условие не выполняется, то поступим следующим образом. Пусть $\delta = (\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность положительных чисел (вес). Определим взвешенное бесконечное тензорное произведение $\bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_n$ пространств H_n с весом δ как гильбертово пространство, порожденное ортонормированным базисом $\left(\delta_{\nu(\alpha)}^{-\frac{1}{2}} e_\alpha\right)_{\alpha \in A}$ (см. работы Ю. М. Березанского, И. М. Гали и В. А. Жука [9, 10]). Если $\delta_n \geqslant 1$ $(n=1, 2, \ldots)$, то, очевидно,

$$\bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_n \subseteq \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} G_n.$$

Можно доказать, что это вложение квазиядерно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{-1} \left(\prod_{k=1}^{n-1} |O_k|^2 \right) (|O_n|^2 - 1) < \infty, \tag{2.2}$$

т. е. для квазиядерности вложения нужно перенормировать пространство $\bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n$, подавляя должным образом поведение функций „в направлении роста числа переменных“.

3°. Таким образом, если имеется последовательность цепочек

$$H_{-,n} \supseteq H_{0,n} \supseteq H_{+,n} \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

таких, что вложения $O_n: H_{+,n} \to H_{0,n}$ квазиядерны и что в каждом $H_{+,n}$ выбран орт $e^{(n)}$, являющийся также ортом в $H_{0,n}$, то гильбертовы пространства, построенные по стабилизирующей последовательности e,

$$\mathscr{H}_- = \bigotimes_{n=1;e,\delta^{-1}}^{\infty} H_{-,n} \supseteq \mathscr{H}_0 = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_{0,n} \supseteq \mathscr{H}_+ = \\ = \bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_{+,n} (\delta_n \geqslant 1, \delta^{-1} = (\delta_n^{-1})_{n=1}^{\infty}) \qquad (2.4)$$

образуют цепочку. Если вес δ удовлетворяет условию (2.2), то вложение $\mathscr{O}: \mathscr{H}_+ \to \mathscr{H}_0$ квазиядерно.

§ 3. Ядерные пространства функций бесконечного числа переменных

1°. Для построения разложения по обобщенным собственным векторам самосопряженных операторов в $\mathscr{H}_0$ можно использовать также цепочку типа (2.4), где роль пространства $\mathscr{H}_+$ играет ядерное линейное топологическое пространство $\Phi \subseteq \mathscr{H}_0$ (включение топологическое), плотное в $\mathscr{H}_0$. Тогда $\Phi' \supseteq \mathscr{H}_0' = \mathscr{H}_0$, и мы получим

$$\Phi' \supseteq \mathscr{H}_0 \supseteq \Phi. \qquad (3.1)$$

Опишем, следуя работе Ю. М. Березанского и Ю. С. Самойленко [11], общую конструкцию ядерных пространств функций бесконечного числа переменных как проективных пределов гильбертовых пространств, рассмотренных в § 2. Пусть $\Phi_n = \bigcap_{\tau_n \in T_n} H_{\tau_n} = \mathrm{pr} \lim H_{\tau_n}$ — представление ядерного пространства Φ_n в виде проективного предела гильбертовых пространств H_{τ_n}. Будем считать, что существует последовательность $e = (e^{(n)})_{n=1}^{\infty}$, где $e^{(n)} \in \Phi_n$ и $\| e^{(n)} \|_{H_{\tau_n}} = 1$ для любого $\tau_n \in T_n$. Построим взвешенное тензорное произведение $\bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_{\tau_n}$ гильбертовых пространств H_{τ_n} ($\delta_n \geqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$).

Определим взвешенное бесконечное тензорное произведение ядерных пространств Φ_n следующим образом:

$$\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \operatorname{pr}\lim \bigotimes_{n=1;e,\delta}^{\infty} H_{\tau_n}, \tag{3.2}$$

где проективный предел берется по всем весам δ и по всем последовательностям $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ $(\tau_n \in T_n)$. Доказывается, что определение пространства $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ корректно и что пространство $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ является ядерным.

Заметим, что ядерность пространства $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ сохраняется, если в (3.2) брать проективный предел не по всем весам δ, а по некоторому достаточно богатому множеству весов. Следует также отметить, что при достаточно быстром с ростом n стремлении к 1 гильбертовых норм операторов вложения $H_{\tau_n} \to H_{\tau_{m(n)}}$ (таком, что выполняется условие типа (2.1)) отпадает необходимость взвешивать бесконечное тензорное произведение $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n$. В этом случае ядерным будет пространство $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \operatorname{pr}\lim \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_{\tau_n}$, где проективный предел берется по всем $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ (или по достаточно богатому множеству таких последовательностей).

Обобщение описанной выше конструкции на бесконечные тензорные произведения локально-выпуклых пространств дано Л. М. Корсунским [12]. А. В. Марченко [13—15] дал широкое обобщение конструкций § 2 и описанной сейчас. В этом обобщении вместо вложений $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n \to \left(\bigotimes_{n=1}^{p} H_n\right) \otimes e^{(p+1)} \subseteq \bigotimes_{n=1}^{p+1} H_n$, по существу, фигурирующих при построении бесконечного тензорного произведения, задается последовательность изометрий $i_p: G_p \to G_{p+1}$ $(p=1, 2, \ldots)$, где $(G_p)_{p=1}^{\infty}$ — заданная последовательность гильбертовых пространств, играющих роль пространств $\bigotimes_{n=1}^{p} H_n$. Роль бесконечного тензорного произведения гильбертовых пространств сейчас играет индуктивный предел $\operatorname{ind}\lim_{\infty} G_p$. Благодаря гибкости этой конструкции появляется возможность вкладывать операторный смысл и изучать достаточно сложно записываемые формальные выражения, имеющие смысл гамильтонианов.

2°. Перейдем к построению пространств основных и обобщенных функций бесконечного числа переменных. Применяя описанную выше конструкцию, мы можем по последовательности цепочек

$$\Phi_n' \supseteq H_{0,n} \supseteq \Phi_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

пространств функций конечного числа переменных построить цепочку

$$\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n\right)' \supseteq \mathscr{H}_0 = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_{0,n} \supseteq \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n, \tag{3.4}$$

где $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ — взвешенное, вообще говоря, бесконечное тензорное произведение пространств Φ_n. Пространства $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ и $\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} \Phi_n\right)'$ цепочки (3.4) — это пространства соответственно основных и обобщенных функций бесконечного числа переменных.

Приведем пример цепочки (3.4). Пусть $H_{0,n} = L_2(R^1, \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-x_n^2} dx_n) = L_2(R^1, dg(x_n))$, $\Phi_n = S_g(R^1) = \bigcap_{l=0}^{\infty} W_2^l(R^1, dg(x_n))$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Можно показать, что $S_g(R^1) = \{u(t) = e^{t^2/2} v(t) \mid v(t) \in S(R^1)\}$. Тогда, используя один результат Л. Шварца [16], получим такое представление

$$S_g(R^1) = \bigcap_{l=0}^{\infty} H_l = \bigcap_{l=0}^{\infty} \left\{ u(t) = \right.$$
$$\left. = \sum_{k=0}^{\infty} u_k h_k(t) \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 (1 + k)^l < \infty \right\}, \tag{3.5}$$

где $h_k(t)$ k-тый полином Эрмита, нормированный по мере $dg(t)$. Используя (3.5), можно доказать, что пространство

$$S_g(R^\infty) = \operatorname{pr} \lim \bigotimes_{n=1;1}^{\infty} H_{\tau_n}, \tag{3.6}$$

где pr lim берется по всем последовательностям $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ ($\tau_n = 0, 1, \ldots$), является ядерным.

Доказывается, что $S_g(\boldsymbol{R}^\infty)$ как множество совпадает с $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_g(\boldsymbol{R}^m)$ и что сходимость в $S_g(\boldsymbol{R}^\infty)$ эквивалентна сходимости в пространстве $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_g(\boldsymbol{R}^m)$, наделенном топологией индуктивного предела пространств $S_g(\boldsymbol{R}^m)$.

Если в (3.6) брать проективный предел не по всем $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$, то в полученное пространство будут входить и нецилиндрические (т. е. зависящие от бесконечного числа переменных) функции.

Приведем еще принадлежащий Ю. Г. Кондратьеву и Ю. С. Самойленко [17] пример пространства $\mathfrak{A}_g(\boldsymbol{R}^\infty)$ основных функций бесконечного числа переменных, строящегося подобно $S_g(\boldsymbol{R}^\infty)$ по пространствам

$$\mathfrak{A}_g(\boldsymbol{R}^1) = \bigcap_{l=0}^{\infty} H'_l = \bigcap_{l=0}^{\infty} \left\{ u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k h_k(t) \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^2 l^k < \infty \right\}.$$

Отметим, что $u(t) \in \mathfrak{A}_g(\boldsymbol{R}^1)$ в том и только в том случае, когда $u(t)$ является сужением на действительную ось целой функции минимального типа порядка 2.

В [17] для пространств $\bigotimes\limits_{n=1;1}^{\infty} H'_{\tau_n}$ доказаны теоремы вложения типа теорем С. Л. Соболева: если $\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ достаточно быстро, то функции из $\bigotimes\limits_{n=1;1}^{\infty} H'_{\tau_n}$ непрерывны на гильбертовом пространстве последовательностей, скалярное произведение в котором определенным образом зависит от $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$, и в определенном смысле непрерывно дифференцируемы. Доказано также, что ядерная шкала пространств $\bigotimes\limits_{n=1;1}^{\infty} H'_{\tau_n}$ может быть построена по операторам типа числа частиц квантовой теории поля. Отметим, что эти результаты развивают соответствующие результаты М. А. Пич [18] о гладкости функций бесконечного числа переменных.

§ 4. Операторы, допускающие разделение бесконечного числа переменных

1°. Рассмотрим последовательность гильбертовых пространств $H_1, H_2, \ldots$. Пусть в каждом H_n задан самосопряженный оператор A_n с областью определения $\mathfrak{D}(A_n)$, содержащей орт $e^{(n)}$, и пусть $E_n(\lambda)$ — разложение единицы оператора A_n. Построим пространство $\mathcal{H} = \bigotimes_{n=1;e}^{\infty} H_n$ и в нем оператор $\mathcal{A}_n = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes}_{n-1} 1 \otimes A_n \otimes 1 \otimes \ldots$. Рассмотрим в $\mathcal{H}$ оператор, формально имеющий вид $l = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. По выражению l определим в $\mathcal{H}$ оператор $\mathcal{A}_{\min}$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min}) =$ л. о. $\{f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(p)} \otimes e^{(p+1)} \otimes \ldots$, $p = 1, 2, \ldots$; $f^{(k)} \in \mathfrak{D}(A_k)\}$, полагая $\mathcal{A}_{\min} f = lf$. При этом, например, требуется, чтобы выполнялось

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| A_n e^{(n)} \|_{H_n} < \infty. \tag{4.1}$$

В работах Ю. М. Березанского и Г. Ф. Уса [19, 20] доказано, что оператор $\mathcal{A}_{\min}$ в существенном самосопряжен на $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_{\min})$, а разложение единицы $\mathcal{E}(\lambda)$ оператора $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}_{\min}$ совпадает с бесконечной сверткой $\left(\mathop{\star}_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \right)(\lambda)$ разложений единиц $\mathcal{E}_n(\lambda) = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes}_{n-1} 1 \otimes E_n(\lambda) \otimes 1 \otimes \ldots$ операторов $\mathcal{A}_n$. Здесь бесконечная свертка понимается как предел $\left(\mathop{\star}_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \right)(\lambda) = \lim_{N \to \infty} \left(\mathop{\star}_{n=1}^{N} \mathcal{E}_n \right)(\lambda)$ в определенном слабом смысле. Этот предел существует, если, например, выполнено (4.1). Установлены также необходимые и достаточные условия существования $\left(\mathop{\star}_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \right)(\lambda)$ и того, что $\left(\mathop{\star}_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \right)(\lambda)$ является разложением единицы, обобщающие на операторнозначные меры теорему А. Н. Колмогорова о трех рядах. Показано, что спектр $S(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ совпадает с замыканием точек $\lambda \in R^1$, представимых в виде сходящегося ряда $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\lambda)$, где $\lambda_k(\lambda) \in S(A_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим два примера операторов, допускающих разделение бесконечного числа переменных.

а) Пусть $H_n = L_2([0, 1], dx_n)$, $e^{(n)} = 1$. Сейчас $\mathscr{H}$ совпадает с пространством L_2, построенным на бесконечномерном кубе $[0, 1] \times [0, 1] \times \ldots$ — по произведению лебеговых мер $dx_1 \otimes dx_2 \otimes \ldots$. Положим $A_k u = -D_k^2 u$ с граничным условием $u'(0) = u'(1) = 0$. Тогда $A_k 1 = 0$ и (4.1), очевидно, выполняется. В результате получаем спектральную теорию оператора Лапласа $\Delta = -(D_1^2 + D_2^2 + \ldots)$, рассматриваемого в $L_2([0, 1] \times [0, 1] \times \ldots, dx_1 \otimes dx_2 \otimes \ldots)$ с граничным условием Неймана. Сейчас $S(\Delta) = \{k\pi^2 \mid k = 0, 1, \ldots\}$, причем все собственные значения (кроме однократного собственного значения 0) имеют бесконечную кратность.

б) Пусть $H_n = L_2(R^1, dg(x_n))$, $e^{(n)} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тогда $\mathscr{H} = L_2(R^\infty, dg(x))$. Пусть $A_n = N_n$ — самосопряженный оператор, порожденный в $L_2(R^1, dg(x_n))$ дифференциальным выражением $-\frac{1}{2}(D_n^2 - 2x_n D_n)$. Сейчас $A_n 1 = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и в $\mathscr{H}$ определен самосопряженный оператор $\mathscr{N}_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \mathscr{N}_n$ $(\tau = (t_n)_{n=1}^{\infty},\ t_n > 0)$ — оператор типа числа частиц квантовой теории поля (оператор числа частиц получим при $t_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$). Спектр оператора $\mathscr{N}_\tau$ легко описывается.

2°. Предположим, что для каждого из операторов $\mathscr{A}_n$ известно разложение по обобщенным собственным векторам, пусть $P_n(\lambda_n) : H_{+,n} \to H_{-,n}$ и $\rho_n(\Delta) = \text{Сл.}(O_n^+ E_n(\cdot) O_n)$ — соответствующие оператор обобщенного проектирования и спектральная мера. Возникает естественный вопрос: как по этим разложениям написать разложение для оператора $\mathscr{A}$?

Построим по последовательности цепочек (2.3) цепочку (2.4) и обозначим через $O : \mathscr{H}_+ \to \mathscr{H}_0$, $O^+ : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_-$, соответствующие операторы вложения. Доказывается, что [19, 20] спектральная мера $\rho(\Delta) = \text{Сл.}(O^+ \varepsilon(\Delta) O)$ оператора $\mathscr{A}$ совпадает с бесконечной сверткой $\mathop{\star}_{n=1}^{\infty} \rho_n =$

$= \lim_{N\to\infty}\left(\mathop{\star}_{n=1}^{N}\rho_n\right)$ мер ρ_n (предел существует в смысле слабой сходимости мер). Для оператора обобщенного проектирования $\mathscr{P}(\lambda)$, отвечающего оператору $\mathscr{A}$, справедливо представление

$$\mathscr{P}(\lambda) = \int\limits_{\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = \lambda\right\}}\left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} P_n(\lambda_n)\right) d\sigma_\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)\ (\lambda\in \mathbf{R}^1), \tag{4.2}$$

(интеграл сходится по гильбертовой норме операторов из $\mathscr{H}_+$ в $\mathscr{H}_-$). Здесь $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in \mathbf{R}^1}$ — семейство конечных мер в $\mathbf{R}^\infty$, каждая из которых сосредоточена на плоскости $\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = \lambda\right\}$.

Например, для оператора Лапласа Δ, определенного в п. 1°, представление типа (4.2) для проектора $\mathscr{P}_{k\pi^2}$ на собственное подпространство, отвечающее $k\pi^2$, имеет вид

$$\mathscr{P}_{k\pi^2} = \sum_{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = k\pi^2} \bigotimes_{n=1}^{\infty} P_{\lambda_n}\ (k = 0, 1, \ldots).$$

Такое представление является обобщением хорошо известной в случае конечного числа переменных формулы.

В доказательстве представления (4.2) существенную роль играет тот факт, что оператор $\mathscr{A}$ является линейной функцией $F(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$ коммутирующей системы $(\mathscr{A}_k)_{k=1}^{\infty}$ самосопряженных операторов, действующих в $\mathscr{H}$ «по различным переменным». Это обстоятельство дало возможность Г. Ф. Усу [21] изучить спектральную теорию операторов, являющихся функциями $F(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots)$ семейства $(\mathscr{A}_k)_{k=1}^{\infty}$ для достаточно широкого класса функций F, иными словами, построить операционное исчисление для семейства $(\mathscr{A}_k)_{k=1}^{\infty}$. В [21], в частности, рассмотрены бесконечномерные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в $L_2(\mathbf{R}^\infty, dg(x))$, а также операторы, близкие к операторам типа Лапласа — Леви.

3°. Самосопряженность оператора $\mathscr{A}$, допускающего разделение бесконечного числа переменных другими способами доказана Л. Стрейтом [22], М. Ридом [23], И. Накагами [24]. В том случае, когда $\mathscr{A}$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в пространстве $L_2(\boldsymbol{R}^\infty, dg(x))$, его самосопряженность является частным случаем результата Ю. Л. Далецкого.

В заключение отметим, что к рассмотрению операторов с разделяющимися переменными приводят некоторые задачи квантовой теории поля. Так, в [22, 23] эти операторы возникли при изучении представления канонических коммутационных соотношений в бесконечных тензорных произведениях гильбертовых пространств как гамильтонианы невзаимодействующих систем с бесконечным числом степеней свободы. Помимо этого, при переходе от пространства Фока к изоморфным пространствам функций бесконечномерного аргумента гамильтонианы систем свободных частиц (в случае, когда у гамильтониана одной частицы дискретный спектр) переходят в операторы, допускающие разделение бесконечного числа переменных (см. § 5).

§ 5. Изоморфизм между пространством Фока и пространством суммируемых с квадратом функций бесконечного числа переменных. Возмущение операторов, допускающих разделение переменных

1°. Пусть $\mathscr{F} = \oplus \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{S}\, H^n$ — симметричное пространство Фока ($\mathrm{S}\, H^n$ — n-я симметричная тензорная степень гильбертова пространства $H (n=1, 2, \ldots)$, $\mathrm{S}\, H^0 = \boldsymbol{C}$). Рассмотрим в $\mathscr{F}$ счетное семейство коммутирующих самосопряженных операторов $A_n = \mathfrak{A}(e_n) + \mathfrak{A}^+(e_n)$ ($(e_n)_{n=1}^\infty$ — вещественный ортонормированный базис в H, $\mathfrak{A}(f)$ и $\mathfrak{A}^+(f)$ — операторы уничтожения и рождения в $\mathscr{F}$). В. Д. Кошманенко и Ю. С. Самойленко [25] построили разложение по обобщенным собственным векторам системы $(A_n)_{n=1}^\infty$ и показали, что преобразование Фурье по общим обобщенным собственным векторам операторов A_n устанавливает изоморфизм $\mathfrak{U}$ между пространствами $\mathscr{F}$ и $L_2(\boldsymbol{R}^\infty, dg(x))$, построенный ранее другим способом Е. Сигалом [26].

Пусть A в существенном самосопряженный на $\mathfrak{D}(A) = $ л. о. $\left((e_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ оператор в H (гамильтониан одной частицы). Определим на л. о. базисных векторов в $\mathcal{F}$ оператор $\Gamma(A)$ (гамильтониан бесконечной системы невзаимодействующих частиц), полагая на $f_n \in \mathfrak{D}(\Gamma(A)) \cap \mathrm{S} H^n$:
$\Gamma(A) \; f_n = (A \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{n-1} + \ldots + \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{n-1} \otimes A) \, f_n$ ($n=1, 2, \ldots$). В работе Ю. С. Самойленко [27] доказано, что при изоморфизме $\mathfrak{U}$ операторы $\Gamma(A)$ переходят во введенные Ю. Л. Далецким в [28] бесконечномерные эллиптические операторы второго порядка с постоянными коэффициентами. Именно

$$\widehat{A}f = (\mathfrak{A}\Gamma(A)\,\mathfrak{A}^{-1}f)(x) = \frac{1}{2}(-\mathrm{Sp}(Af'') + 2(x, Af'(x))).$$
$$(f(x) \in \mathfrak{A}\mathscr{D}(A)))$$

В частности, если у оператора A дискретный спектр и $Ae_n = \lambda_n e_n (n=1, 2, \ldots)$, то $\widehat{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(-\frac{1}{2} D_n^2 + x_n D_n\right)$ — оператор с разделившимися переменными. Если же между частицами системы имеется взаимодействие, то соответствующий гамильтониану такой системы оператор в $L_2(\boldsymbol{R}^{\infty}, dg(x))$ получим, возмущая должным образом оператор $\widehat{A}$. В связи с этим возникает трудный вопрос установления самосопряженности возмущенного оператора. Опишем сейчас один результат в этом направлении.

2°. Рассмотрим в пространстве $L_2(\boldsymbol{R}^{\infty}, d\rho(x))$ (здесь $d\rho(x) = p_1(x_1)\,dx_1 \otimes p_2(x_2)\,dx_2 \otimes \ldots$, $p_k(x_k)$ — фиксированный гладкий вес, $p_k(x_k) > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} p_k(x_k)\,dx_k = 1$) формально самосопряженное эллиптическое дифференциальное выражение

$$(Lu)(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} (D_k^2 u)(x) + q(x)\,u(x), \quad D_k u =$$
$$= p_k^{-1/2}(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(p_k^{1/2}(x_k)\,u\right).$$

Условия $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{R^1} |(D_k^2 1)(x)|^2 \, d\rho(x) \right)^{1/2} < \infty$ (см. (4.1) и

$q(x) \in L_2(R^\infty, dg(x))$ позволяют по этому выражению определить на линейной области цилиндрических гладких функций оператор A, подобный стационарному оператору Шредингера. В работе Ю. М. Березанского [29] доказано, что если потенциал $q(x)$ достаточно быстро аппроксимируется цилиндрическими функциями, то оператор A в существенном самосопряжен. Методика доказательства заключается в некоторой модификации методики А. Я. Повзнера [30] и Ю. М. Березанского [3], перехода к вопросу о единственности сильных решений задачи Коши для соответствующего эволюционного уравнения.

Некоторые более ранние результаты по самосопряженности дифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и переменными коэффициентами, полученные другими способами и имеющие другой вид, содержатся в работах Ю. Л. Далецкого [28], Б. Саймона и Р. Хоэг — Крона [31] и А. В. Марченко [13, 14] (см. также приведенную в [31] библиографию).

§ 6. Положительно определенные функции бесконечного числа переменных

1°. Для положительно определенных (п. о.) ядер $K(x, y)$ точек x, y конечномерного пространства существует общий восходящий к М. Г. Крейну [32] метод получения интегральных представлений по собственным функциям дифференциальных и других классов операторов (см. работы Ю. М. Березанского [3, гл. VIII; 6]). Он заключается во введении по ядру $K(x, y)$ гильбертова пространства и построении разложения по обобщенным собственным векторам самосопряженных операторов, рассматриваемых в этом пространстве; соответствующее равенство Парсеваля дает требуемое представление.

Ю. М. Березанским, И. М. Гали и В. А. Жуком [9, 10] показано, что этот метод применим и в случае дифференциальных операторов, действующих в пространстве функций бесконечного числа переменных, для получения интегрального представления типа Бохнера п. о. функций бесконечномерного аргумента.

Именно в R^∞ рассматривается мера $d\theta(x) = p(x_1)dx_1 \otimes \otimes p(x_2)dx_2 \otimes \ldots$, где $C^1(R^1) \ni p(t) > 0$ — фиксированный вес $\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t)\,dt = 1\right)$ и мера $d\theta.(x) = p.(x_1)\,dx_1 \otimes p.(x_2)\,dx_2 \otimes \otimes \ldots$, где $p.(t) = p(t) \star p(-t)$. Доказывается, что каждая $d\theta.(x)$-измеримая ограниченная функция $k(x)$, п. о. в интегральном смысле, допускает представление

$$k(x) = \int\limits_{R^\infty[p]} e^{i(\lambda,x)} d\sigma(\lambda), \qquad (6.1)$$

где $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера на σ-оболочке цилиндрических множеств из $R^\infty[p]$, определяющаяся по $k(x)$ однозначно. Равенство в (6.1) понимается $d\theta.(x)$-почти везде в R^∞, $R^\infty[p]$ состоит из тех векторов $\lambda \in R^\infty$, для которых сходится $\prod\limits_{n=1}^{\infty} |\tilde{p}(\lambda_n)|$ ($\tilde{p}$ — преобразование Фурье p). Обратно, всякий интеграл вида (6.1) определяет п. о. функцию точки $x \in R^\infty$.

Представление (6.1) получено также для п. о. функций в слое $R^\infty_{2l} = (-2l, 2l) \times R^1 \times R^1 \times \ldots$. Тем самым доказано, что такую функцию можно продолжить с сохранением положительной определенности на все R^∞. Изучен вопрос о единственности такого продолжения, в частности, получено достаточное условие единственности в терминах производных от $k(x)$ в 0.

В случае гауссовской меры $d\theta(x)$ множество $R^\infty[p]$ совпадает с пространством l_2. Это дает возможность обобщить теорему Р. А. Минлоса — В. В. Сазонова [33, 34] на случай слоя гильбертова пространства. Из представления (6.1) вытекает, что каждая п. о. в обычном смысле функция $k(x)$ в слое гильбертова пространства H, непрерывная в 0 в J-топологии, продолжается до такой же функции на всем пространстве (под J-топологией в H понимается топология, заданная окрестностями 0 вида $\{x \in H \mid (Ax, x)_H < 1\}$, где A — неотрицательные ядерные операторы).

Представления типа Бохнера с помощью методики работ [9, 10] для п. о. функций в слое пространств $l_p (1 < p \leqslant 2)$ получены Ю. Г. Кондратьевым [35]. Результаты работы [35] обобщают соответствующие результаты де Акоста [36]. Интегральные представления экспоненциально-выпуклых функций бесконечного числа переменных в слое получены Фу Хи [37].

Отметим еще, что для обобщенных п. о. функций и мер бесконечномерного аргумента Ю. Л. Далецким и Ю. С. Самойленко [38] установлен аналог теоремы Бохнера — Шварца. Для обобщенных п. о. ядер бесконечного числа переменных, инвариантных в определенном смысле, Ю. Г. Кондратьевым и Ю. С. Самойленко [17] получены интегральные представления типа Л. Шварца.

§ 7. Обобщенная степенная симметрическая проблема моментов

1°. Пусть $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Необходимым и достаточным условием существования представления

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\rho(\lambda) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7.1}$$

с некоторой неотрицательной конечной мерой $d\rho(\lambda)$ является моментность последовательности $(s_n)_{n=0}^{\infty}$, т. е. положительная определенность матрицы $(s_{j+k})_{j,k=0}^{\infty}$: $\sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k}\zeta_j\bar{\zeta}_k \geqslant 0$ для любой финитной последовательности $(\zeta_j)_{j=0}^{\infty}$ $(\zeta_j \in C)$.

Рассмотрим обобщение представления (7.1) на случай, когда S_n — функционал над n-й тензорной степенью ядерного пространства Φ $(n=0, 1, \ldots)$, полученное Ю. М. Березанским и С. Н. Шифриным [39]. Отметим, что к такому обобщению степенной проблемы моментов приводят некоторые задачи квантовой теории поля (см. в связи с этим также работу Ю. М. Березанского [40], где рассмотрена более сложная ситуация).

Пусть $\Phi = \mathrm{pr}\lim H_\tau$ — ядерное пространство с инволюцией $u \to \bar{u}$, $\Phi^n = \mathrm{pr}\lim \bigotimes_{j=1}^{n} H_\tau$ — его n-я тензорная степень, $(\Phi^n)'$ — сопряженное пространство антилинейных функционалов. Инволюцию посредством построения тензорных степеней и по сопряжению можно расширить на Φ^n и $(\Phi^n)'$; обозначим через $\Phi'_{\mathrm{Re}} = \{\alpha \in \Phi' \mid \alpha = \bar{\alpha}\}$. Последовательность $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$, $S_n \in (\Phi^n)'_{\mathrm{Re}}$, каждый элемент которой симметричный (т. е. $S_n(u^{(1)} \otimes \ldots \otimes u^{(n)})$ — симметричная функция от $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)} \in \Phi$), назовем моментной, если для любой финитной последовательности $u = (u_j)_{j=0}^{\infty}$, $u_0 \in C$, $u_j \in \Phi^j$ (их совокупность обозначим C_0)

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} S_{j+k}(u_j \otimes \bar{u}_k) \geqslant 0.$$

В [39] доказано, что моментная последовательность S, удовлетворяющая определенному условию на рост S_n, представима в виде

$$S_n = \int\limits_{\Phi'_{\mathrm{Re}}} \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{n}\, d\rho(\lambda) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{7.2}$$

где $d\rho(\lambda)$ — конечная неотрицательная мера на Φ'_{Re}. Здесь интегрируется вектор-функция $\Phi'_{\mathrm{Re}} \ni \lambda \to \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{n} \in (\Phi^n)'$, интеграл сходится слабо.

Для получения представления (7.2) используется описанный в § 6 метод. Именно, по последовательности S вводится квазискалярное произведение $\langle u, v\rangle = \sum_{j,k=0}^{\infty} S_{j+k}(v_j \otimes \bar{u}_k)$ $(u, v \in C_0)$. После факторизации и пополнения получим гильбертово пространство H_s. Определим в H_s оператор A_e $(e \in \Phi_{\mathrm{Re}})$ как замыкание в C_0 оператора $A_e: (u_0, u_1, u_2, \ldots) \mapsto (0, e \otimes u_0, e \otimes u_1, \ldots)$. Условия на рост S_n обеспечивают самосопряженность и коммутируемость операторов A_e. Построив разложение по обобщенным собственным векторам системы $(A_{e_k})_{k=1}^{\infty}$ ($\{e_k, k = 1, 2, \ldots\}$ — всюду плотное в Φ множество), получим (7.2).

Представление (7.2) охватывает обычную конечномерную проблему моментов, а также изученную А. Г. Костюченко и Б. С. Митягиным в [41] бесконечномерную проблему моментов.

2°. Задача о продолжении усеченной моментной последовательности $S = (S_k)_{k=0}^{2n}$ $(S_k \in (\Phi^k)'_{\mathrm{Re}})$ до полной рассмотрена Г. Ф. Усом в [42]. Получены необходимые и достаточные условия существования продолжения с определенным условием на рост, описано множество таких продолжений.

В работе С. Н. Шифрина [43] установлены условия, обеспечивающие возможность представления моментной последовательности в виде (7.2), где интеграл берется не по всему Φ'_{Re}, а по некоторому конусу или клину (обобщение степенной проблемы моментов Стильтьеса). Им же в [44] рассмотрена гладкая симметрическая проблема моментов, т. е. $S_n \in \Phi^n$ $(n=0, 1, \ldots)$. Доказывается, что моментная последовательность такого вида, удовлетворяющая определенным условиям на рост, представима в виде (7.2), где интегрирование ведется по Φ'_{Re}.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горбачук В. И., Самойленко Ю. Г., Ус Г. Ф.** Спектральная теория самосопряженных операторов и бесконечномерный анализ.— «Успехи мат. наук», 1976, т. 31, № 1, с. 203—216.
2. **Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.** Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., Физматгиз, 1961. 472 с.
3. **Березанский Ю. М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, «Наукова думка», 1965. 798 с.
4. **Maurin K.** General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups. Warszawa, Polish Scient. Publ., 1968. 367 p.
5. **Березанский Ю. М.** Интегральное представление положительно определенных функционалов типа Уайтмана.— «Укр. мат. журн.», 1967, т. 19, № 1, с. 89—95.
6. **Березанский Ю. М.** Разложение по обобщенным собственным векторам и интегральное представление положительно определенных ядер в форме континуального интеграла.— «Сиб. мат. журн.», 1968, т. 9, № 5, с. 998—1013.
7. **Maurin K.** A remark on Berezanskii version of spectral theorem.— "Studia math.", 1970, v. 34, N 2, p. 165—167.
8. **Березанский Ю. М.** О разложении по совместным обобщенным собственным векторам произвольного семейства коммутирующих нормальных операторов.— «Докл. АН СССР», 1976, т. 229, № 3, с. 531—533.
9. **Березанский Ю. М., Гали И. М., Жук В. А.** О положительно определенных функциях бесконечного числа переменных.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 203, № 1, с. 13—15.
10. **Березанский Ю. М., Гали И. М.** Положительно определенные функции бесконечного числа переменных в слое.— «Укр. мат. журн.», 1972, т. 24, № 4, с. 435—464.
11. **Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С.** Ядерные пространства функций бесконечного числа переменных.— «Укр. мат. журн.», 1973, т. 25, № 6, с. 723—737.
12. **Корсунский Л. М.** О бесконечных тензорных произведениях локально выпуклых пространств.— «Укр. мат. журн.», 1975, т. 27, № 1, с. 13—23.
13. **Марченко А. В.** Об индуктивных пределах линейных пространств и операторов и об их приложениях.— «Вестн. Моск. ун-та», 1974, № 2, с. 26—33.

14. **Марченко А. В.** Самосопряженные дифференциальные операторы с бесконечным числом независимых переменных.— «Мат. сб.», 1975, т. 96, № 2, с. 276—293.
15. **Марченко А. В.** Пространства функций от бесконечного числа переменных как индуктивные пределы локально выпуклых пространств.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и и их приложения. Т. 24, Харьков, «Вища школа», 1975, с. 86—98.
16. **Schwartz L.** Theorie des distributions. V. I, Paris, Hermann, 1950, 148 p.; v. II, Paris, Hermann, 1951, 166 p.
17. **Кондратьев Ю. Г., Самойленко Ю. С.** Интегральное представление обобщенных положительно определенных ядер бесконечного числа переменных.— «Докл. АН СССР», 1976, т. 227, № 4, с. 800—803.
18. **Piech M. A.** The Ornstein — Uhlenbeck semigroup in an infinite dimensional L^2-setting.— "J. Functional Analysis", 1975, v. 18, p. 271—285.
19. **Березанский Ю. М., Ус Г. Ф.** О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, допускающих разделение бесконечного числа переменных.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 5, с. 1005—1008.
20. **Berezanski Yu. M., Us G. F.** Eigenfunction expansion of operators admitting separation of infinite number of variables.— "Reports Math. Phys.", 1975, v. 7, N 1, p. 103—126.
21. **Ус Г. Ф.** Разложение по собственным функциям операторов, действующих в пространствах функций от бесконечного числа переменных. Автореф. канд. дис. Киев, 1975. 22 с.
22. **Streit L.** Test function spaces for direct product representations of the canonical commutation relations.— "Communs Math. Phys.", 1967, v. 4, N 1, p, 22—31.
23. **Reed M. C.** On self-adjointness in infinite tensor product spaces.— "J. Functional Analysis", 1970, v. 5, N 1, p. 94—124.
24. **Nakagami Y.** Infinite tensor products of operators.— "Publ. Res. Inst. Math. Sci.", 1974, v. 10, N 1, p. 111—145.
25. **Кошманенко В. Д., Самойленко Ю. С.** Об изоморфизме между пространством Фока и пространством функций бесконечного числа переменных.— «Укр. мат. журн.», 1975, т. 27, № 5, с. 669—674.
26. **Segal E.** Tensor algebras over Hilbert spaces.— "Trans. Amer. Math. Soc.", 1956, v. 81, N 1, p. 106.
27. **Самойленко Ю. С.** Об интегральном представлении положительно определенных ядер бесконечного числа переменных.— «Укр. мат. журн.», 1977 (в печати).
28. **Далецкий Ю. Л.** Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения.— «Успехи мат. наук», 1967, т. 22, № 4, с. 3—54.
29. **Березанский Ю. М.** Самосопряженность эллиптических операторов с бесконечным числом переменных.— «Укр. мат. журн.», 1975, т. 27, № 6, с. 729—742.
30. **Повзнер А. Я.** О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u+cu$.— «Мат. сб.», 1953, т. 32, № 1, с. 109—156.
31. **Simon B., Hoegh R.** Hypercontractive semigroups and two dimensional self-coupled bose field.— "J. Functional Analysis", 1972, v. 9, N 2, p. 121—180.

32. **Крейн М. Г.** Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения.— «Докл. АН СССР», 1946, т. 53, № 1, с. 3—6.
33. **Минлос Р. А.** Обобщенные случайные процессы и их продолжения до меры.— В кн.: Труды Московского математического общества. Т. 8. М., МГУ, 1959, с. 497—518.
34. **Сазонов В. В.** Замечание о характеристических функционалах.— «Теория вероятностей и ее приложения», 1958, т. 3, № 2, с. 201—205.
35. **Кондратьев Ю. Г.** Положительно определенные функции на некоторых пространствах последовательностей.— «Укр. мат. журн.», 1976, т. 28, № 1, с. 27—35.
36. **Acosta A. D.** Existence and convergence of probability measures in Banach spaces.— "Trans. Amer. Math. Soc.", 1970, v. 152, N 1, p. 273—298.
37. **Нгуен Фу Хи.** О представлении экспоненциально выпуклой функции бесконечного числа переменных.— «Укр. мат. журн.», 1976, т. 28, № 6, с. 830—837.
38. **Далецкий Ю. Л., Самойленко Ю. С.** Спектральное разложение положительно определенных бираспределений.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 3, с. 515—518.
39. **Березанский Ю. М., Шифрин С. Н.** Обобщенная степенная симметрическая проблема моментов.— «Укр. мат. журн.», 1971, т. 23, № 3, с. 291—306.
40. **Березанский Ю. М.** Представление функционалов типа Уайтмана посредством континуальных интегралов.— «Функциональный анализ и его приложения», 1969, т. 3, № 2, с. 348—358.
41. **Костюченко А. Г., Митягин Б. С.** Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах.— В кн.: Труды Московского математического общества. Т. 9. М., МГУ, 1960, с. 283—316.
42. **Ус Г. Ф.** Усеченная обобщенная степенная проблема моментов.— «Укр. мат. журн.», 1974, т. 26, № 3, с. 348—358.
43. **Шифрин С. Н.** О бесконечномерных симметрических аналогах проблемы моментов Стильтьеса.— «Укр. мат. журн.», 1974, т. 26, № 5.
44. **Шифрин С. Н.** Бесконечномерная гладкая симметрическая степенная проблема моментов на ядерных пространствах.— «Укр. мат. журн.», 1976, т. 28, № 6, с. 793—802.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ К ОЦЕНКАМ СПЕКТРА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк

Цель сообщения — описать современное состояние вопроса о поведении сингулярных чисел (s-чисел) интегрального оператора в зависимости от гладкости ядра. За последние годы в этой области накоплен значительный новый материал. В связи с потребностями приложений существенно расширились классы исследуемых уравнений: многомерный случай; неограниченные области; ядра, не интегрируемые с квадратом; операторы в весовых пространствах; различные специальные типы ядер (прежде всего ядра типа функций Грина). Изучены мультипликаторы в классах интегральных ядер.

Получение оценок в столь широких условиях потребовало новой методики. Она основана на специальном способе кусочно-полиномиальных приближений (см. [1, 2]) для функций классов С. Л. Соболева W_p^α. В результате возникает достаточно гибкий аппарат для приближений ядра вырожденными ядрами, что приводит к оценкам s-чисел. Существенно, что получаемые оценки равномерны относительно подходящего класса мер (весов). Другая характерная сторона обсуждаемой методики — последующее уточнение и расширение области применимости оценок посредством линейной и билинейной интерполяционной техники. При этом нет возможности ограничиться интерполяцией только в нормированных классах операторов, но приходится рассматривать и квазинормированные (кв. н.) классы.

§ 1. Предварительные сведения и исходные результаты

Пусть $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — сепарабельные гильбертовы пространства, $T\in\mathfrak{S}_\infty=\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ (T — компактный оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$) и $s_n=s_n(T)=\lambda_n(\sqrt{T^*T})$ — его s-числа. Под оценками s-чисел обычно подразумевают неравенства

$$s_n(T) \leqslant Cn^{-\omega} \qquad 0<\omega<\infty; \tag{1}$$

$$\sum_n s_n^p(T) < C \quad 0<p<\infty. \tag{2}$$

Естественное обобщение приводит к классам $\mathfrak{S}_{p,q} \subset \mathfrak{S}_\infty$: $T \in \mathfrak{S}_{p,q}$ $(0<p<\infty,\ 0<q\leqslant\infty)$, если конечен функционал $N(T|\mathfrak{S}_{p,q})$, где

$$\left.\begin{aligned} N^q(T|\mathfrak{S}_{p,q}) &= \sum_n n^{qp^{-1}-1} s_n^q(T) \quad (0<q<\infty); \\ N(T|\mathfrak{S}_{p,\infty}) &= \sup_n n^{1/p} s_n(T). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Очевидно, включение $T \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$ соответствует оценке (1) при $\omega p = 1$, включение $T \in \mathfrak{S}_p \overset{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{S}_{p,p}$ — оценке (2).

Поясним употребление символов типа $N(\cdot/\mathscr{E})$. Всегда $\mathscr{E}$ — линейное нормированное или квазинормированное (кв. н.) пространство, и функционал $N(\cdot|\mathscr{E})$ представляет собой норму или квазинорму в $\mathscr{E}$. Не исключается, что $\mathscr{E}$ нормируемо, но N не совпадает с нормой, а лишь эквивалентен ей. Так обстоит дело, в частности, для пространств $\mathfrak{S}_{p,q}$: они нормируемы при $1<p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$ и при $p=q=1$, но функционал $N(\cdot|\mathfrak{S}_{p,q})$ является нормой лишь при $q=p\geqslant 1$. При использовании кв. н. классов операторов мы существенно опираемся на результаты С. Ю. Ротфельда [3].

Пусть $X \subseteq \boldsymbol{R}^{m_1}$, $Y \subseteq \boldsymbol{R}^{m_2}$ — измеримые множества, $\mathfrak{H}_1 = L_2X$, $\mathfrak{H}_2 = L_2Y$. Пусть „веса“ a, b и ядро T — измеримые функции, определенные соответственно на X, Y и на $X \times Y$. Мы рассмотрим интегральные операторы вида

$$(T_{ab}u)(y) = \int_X a(x)\,T(x,y)\,b(y)\,u(x)\,dx, \qquad T_{ab}: \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2. \tag{4}$$

Выделение весов a, b удобно, так как позволяет разделять условия гладкости (налагаемые на T) и условия суммируемости (налагаемые на a, b). В ряде случаев достаточно выделять лишь один из весов, например, a. Оператор (4) при $b \equiv 1$ обозначим через T_a:

$$(T_a u)(y) = \int_X a(x)\,T(x,y)\,u(x)\,dx. \tag{5}$$

Мы вначале приведем оценки s-чисел для операторов (4), (5) общего вида, а затем рассмотрим некоторые специальные классы ядер, для которых результаты могут быть существенно дополнены.

Опишем пространства функций (весов и ядер), участвующих в формулировках.

1) Классы Лоренца $L_{p,q}X$ $(1\leqslant p<\infty,\ 0<q\leqslant\infty)$. Пусть функция f измерима и почти везде конечна на X и пусть $f^*(t)$, $t>0$,— равноизмеримая с $|f(x)|$ невозрастающая функция. Включение $f\in L_{p,q}X$ означает, что конечен функционал $N(f|L_{p,q}X)$, где

$$N^q(f\,|\,L_{p,q}X)=\int\limits_0^{\mathrm{mes}\,X} t^{qp^{-1}-1}[f^*(t)]^q\,dt\quad(0<q<\infty);$$

$$N(f|L_{p,\infty}X)=\sup_t[t^{1/p}f^*(t)].$$

Отметим, что $L_{p,p}X=L_pX$. При всех $q\in(0,\infty]$ справедливы непрерывные вложения

$$L_{p-\varepsilon}X\cap L_{p+\varepsilon}X\hookrightarrow L_{p,q}X;\quad L_{p+\varepsilon}X\hookrightarrow L_{p,q}X\quad(\mathrm{mes}X<\infty).$$

2) Пространства Соболева $W_p^\alpha X$, Никольского $H_p^\alpha X$, Бесова $B_{p,q}^\alpha X$ $(\alpha>0,\ 1\leqslant p<\infty,\ 0<q\leqslant\infty)$. По поводу этих пространств см. [4]; случай $0<q<1$ см. в [5]. Норму в них будем обозначать через $N(\cdot|W_p^\alpha X)$ и т. д. Каждая из норм представляет собой сумму „старшего" члена, который будем обозначать через $\overset{\circ}{N}(\cdot)$, и „младшего" члена — нормы в L_pX. Напомним, что $B_{p,\infty}^\alpha=H_p^\alpha$.

Наряду с пространствами $W_p^\alpha\boldsymbol{R}^m$, $H_p^\alpha\boldsymbol{R}^m$, $B_{p,q}^\alpha\boldsymbol{R}^m$ при $p\alpha<m$ определим более широкие пространства функций $\mathscr{W}_p^\alpha\boldsymbol{R}^m$, $\mathscr{H}_p^\alpha\boldsymbol{R}^m$, $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha\boldsymbol{R}^m$. Так, включение $f\in\mathscr{B}_{p,q}^\alpha\boldsymbol{R}^m$ означает, что $f\in B_{p,q}^\alpha$ на любом компакте в $\boldsymbol{R}^m$ и конечен функционал (норма) $N(f\,|\,\mathscr{B}_{p,q}^\alpha\boldsymbol{R}^m)$, где

$$N^p(f\,|\,\mathscr{B}_{p,q}^\alpha\boldsymbol{R}^m)=\overset{\circ}{N}{}^p(f\,|\,B_{p,q}^\alpha\boldsymbol{R}^m)+$$
$$+\int\limits_{\boldsymbol{R}^m}(1+|x|^m)^{-1}|f(x)|^p\,dx. \tag{6}$$

Подобным же образом определяется норма в классе $\mathscr{W}_p^\alpha\boldsymbol{R}^m$. Более подробная характеристика введенных классов содержится в Добавлении 1 к настоящему сообщению.

3) Пространства функций двух переменных (пространства ядер). Эти классы удобно трактовать с точки зрения абстрактных функций. Пусть $\mathscr{E}$ — (квази)нормированное пространство, $N(\cdot|\mathscr{E})$ — (квази) норма в $\mathscr{E}$, и пусть $Y\subset\subset \boldsymbol{R}^m$ — измеримое множество. Через $L_rY\mathscr{E}$, $1\leqslant r\leqslant\infty$, обозначим пространство измеримых отображений $f:Y\to\mathscr{E}$ таких, что $N(f(\cdot)|\mathscr{E})\in L_rY$. Функционал

$$N(f\,|\,L_rY\mathscr{E})=\left[\int\limits_Y N^r(f(y)\,|\,\mathscr{E})\,dy\right]^{1/r},\quad 1\leqslant r<\infty$$

(с обычным видоизменением в случае $r=\infty$) задает в $L_rY\mathscr{E}$ квазинорму. Как правило, в дальнейшем используются пространства типа $L_rYB^{\alpha}_{p,q}X$.

Цель исследования заключается в том, чтобы для операторов $\boldsymbol{T}_{ab}$, $\boldsymbol{T}_a$ вида (4); (5) получить оценки, точные как по порядку убывания s-чисел, так и по отношению к условиям гладкости и суммируемости, накладываемым на ядра и веса. Для проверки точности необходимы посторонние „источники контроля“. Упомянем основные из них.

1) Ряды Фурье. Пусть $X=Y=Q^m\overset{\mathrm{def}}{=}[0,1]^m$, $a=b\equiv1$ и $\boldsymbol{T}(x,y)=F(x-y)$, причем функция F периодична. Тогда s-числа оператора $\boldsymbol{T}_{ab}$ с точностью до перестановки совпадают с модулями коэффициентов Фурье функции F. Поэтому результаты о поведении коэффициентов Фурье могут служить для проверки точности оценок s-чисел по отношению к классам ядер.

2) Дифференциальные уравнения. В области $X\subset\boldsymbol{R}^m$ рассмотрим первую краевую задачу на спектр для уравнения

$$(-1)^l\Delta^l u(x)=\lambda^{-1}g(x)u(x),\quad g\geqslant0.$$

Для этой задачи известны (см. [6, 7]) точные оценки спектра:

$$\lambda_n\leqslant Cn^{-\omega}N(g\,|\,L_rX),\quad \omega=2l/m. \tag{7}$$

Здесь $r=1$ при $\omega>1$, $r>1$ при $\omega=1$, $r=\omega^{-1}$ при $\omega<1$. В случае $\omega<1$ область $X\subseteq\boldsymbol{R}^m$ произвольна, в случае $\omega\geqslant1$ область должна быть ограниченной. Оценка (7) сопровождается асимптотикой вида $\lambda_n\sim c(g)n^{-\omega}$.

В применении к интегральным уравнениям это соответствует операторам вида $\boldsymbol{T}_{ab}$ при $Y=X$, $b=a=\sqrt{g}$; ядро

$T(x, y)$ имеет особенность вида $|x-y|^{2l-m}$ (с добавлением логарифмического множителя, если $2l-m \geqslant 0$ — четное число). Таким образом, имеется возможность проверять точность оценок по отношению к определенным классам ядер и весов.

3) Асимптотика s-чисел интегральных операторов. Пусть $X = Y \subset R^m$ и $T(x, y) = F(x-y)$, причем функция F положительно однородна порядка $k > -m$. В этом случае s-числа оператора T_{ab} вида (4) при широких ограничениях на веса a, b имеют асимптотику

$$s_n(T_{ab}) \sim c(F) \left[\int_X |a(x) b(x)|^{1/\omega} dx \right]^{\omega} n^{-\omega}, \quad \omega = 1 + \frac{k}{m}. \tag{8}$$

Этот способ контроля, очевидно, дополняет предыдущий. Отметим, что получение формулы (8) само опирается на оценки s-чисел.

Ниже для упрощения формулировок всегда будем считать $X = Q^m$, либо, если это возможно, $X = R^m$. Оценки имеют вид

$$s_n(T_a) \leqslant C n^{-\omega} N(T | L_2 Y \mathscr{E}) N(a | L_\lambda X) \tag{9}$$

и первоначально (до интерполяции) получаются для классов $\mathscr{E} = W_p^\alpha Q^m$ или $\mathscr{E} = \mathscr{W}_p^\alpha R^m$. При этом

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{m} \, (p \geqslant 2); \quad \omega = 1 - \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{m} \, (p < 2). \tag{10}$$

Постоянная C зависит только от α, p, m и (при $p\alpha = m$) от λ, но не зависит от Y. Такая „универсальность“ оценок важна для применений.

Теорема 1. *Оценка* (9), (10) *справедлива в каждом из следующих двух случаев*: 1) $X = Q^m$, $\mathscr{E} = W_p^\alpha Q^m$, $p\alpha \geqslant m$; $\lambda = 2$ *при* $p\alpha > m$, $\lambda > 2$ *при* $p\alpha = m$.

2) $X = R^m$, $\mathscr{E} = \mathscr{W}_p^\alpha R^m$, $p\alpha < m$, $p^{-1} - \alpha m^{-1} < \frac{1}{2}$,

$$\lambda^{-1} = \frac{1}{2} + \alpha m^{-1} - p^{-1}. \tag{11}$$

Результат теоремы 1 получен на основе специального метода кусочно-полиномиальных приближений. Этот метод существенно опирается на полуаддитивность снизу нормы в $W_p^\alpha X$ как функции множеств. Вследствие этого он не может быть прямо использован[1] при $\mathscr{E} = B^{\alpha}_{p,q}X$, $p \neq q$. Вместе с тем выясняется, что, хотя теорема 1 в шкале пространств Соболева дает неулучшаемый порядок убывания s-чисел, оценка (9), (10) не лишена недостатков. Так, ядра типа функции Грина не допускают точного описания в шкале W^{α}_{p}, и применение к ним теоремы 1 дает для ω величину „на ε“ хуже правильной. Далее, сравнение с рядами Фурье заставляет предполагать, что, по крайней мере, при $\mathscr{E} = W^{\alpha}_{2}Q^{m}$ должно быть $s_n = o(n^{-\omega})$.

Результат теоремы 1 действительно допускает улучшение в указанных направлениях. Важно, что при этом уже не требуются новые аналитические рассмотрения: уточненные результаты получаются из теоремы 1 на основании общей техники интерполяции линейных и билинейных отображений в нормированных и квазинормированных пространствах. Помимо интерполяционных теорем общего характера нам потребуются некоторые новые факты о билинейной интерполяции, специально приспособленные для интересующих нас случаев.

§ 2. Интерполяционные методы

Множества $X \subset \boldsymbol{R}^{m_1}$, $Y \subset \boldsymbol{R}^{m_2}$ всюду считаются фиксированными. Рассмотрим следующие отображения, действующие из пространств функций в пространства операторов:

$$\Gamma_1 = \Gamma_1(a) : T \to \boldsymbol{T}_a; \tag{12}$$

$$\Gamma_2 : (a,\ T) \to \boldsymbol{T}_a. \tag{13}$$

В дальнейшем встретится также отображение

$$\Gamma_3 = \Gamma_3(T) : (a,\ b) \to \boldsymbol{T}_{ab}. \tag{14}$$

Отображение Γ_1 линейно, отображения Γ_2, Γ_3 билинейны. Ниже используется обозначение $\|\Gamma\|$, смысл которого следующий. Если $\Gamma : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2$, где $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ — кв. н. пространства, то

$$\|\Gamma\| = \|\Gamma\|_{\mathscr{E}_1 \to \mathscr{E}_2} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{N(\Gamma u \mid \mathscr{E}_2) : N(u \mid \mathscr{E}_1) \leqslant 1\}.$$

---

[1] В [1] по недоразумению утверждалась возможность перенесения метода на пространства $H^{\alpha}_{\wp}$.

Если $\Gamma:\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2\to\mathscr{E}_3$, то

$$\|\Gamma\|=\|\Gamma\|_{\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2\to\mathscr{E}_3}\overset{\text{def}}{=}\sup\{N(\Gamma(u,v)\,|\,\mathscr{E}_3):N(u\,|\,\mathscr{E}_1)\leqslant 1,\\ N(v\,|\,\mathscr{E}_2)\leqslant 1\}.$$

Как и в нормированном случае, конечность величины $\|\Gamma\|$ равносильна непрерывности отображения Γ.

Результат теоремы 1 может быть следующим образом истолкован в терминах отображений (12), (13). В условиях случая 1) теоремы 1

$$\Gamma_1(a):L_2YW_p^{\alpha}Q^m\to\mathfrak{S}_{\delta,\infty},\quad \delta=\omega^{-1};\\ \|\Gamma_1(a)\|\leqslant C(m,\alpha,p)N(a\,|\,L_\lambda Q^m). \tag{15}$$

В условиях случая 2) теоремы 1

$$\Gamma_2:L_\lambda R^m\times L_2\mathscr{W}_p^{\alpha}R^m\to\mathfrak{S}_{\delta,\infty},\quad \delta=\omega^{-1}, \tag{16}$$

причем $\|\Gamma_2\|$ зависит лишь от m, α, p.

Выше отмечалось, что дальнейшие результаты об s-числах выводятся отсюда с помощью интерполяции. Мы используем „вещественную" интерполяционную схему Лионса — Питре, включающую случай кв. н. пространств [8, 9]. Согласно этой схеме с любой интерполяционной парой кв. н. пространств (A_0, A_1) сопоставляется двупараметрическое семейство кв. н. пространств $A_{\theta,q}$, $0<\theta<1$, $0<q\leqslant\infty$. Если пространства A_0, A_1 — нормированные и $q\geqslant 1$, то $A_{\theta,q}$ — также нормированное пространство.

Приведем формулировки основных интерполяционных теорем. Будем употреблять обозначения типа $\|\Gamma\|_0$, $\|\Gamma\|_1$, $\|\Gamma\|_{\theta,q}$, $\|\Gamma\|_{\theta,q_1,q_2,q}$, смысл которых ясен из контекста.

Т е о р е м а 2 (об интерполяции линейных отображений [8, 10]). *Пусть* (A_0, A_1), (B_0, B_1) — *интерполяционные пары кв. н. пространств и* $\Gamma:A_i\to B_i$, $i=0,1$. Тогда $\Gamma:A_{\theta,q}\to B_{\theta,q}$ *при любых* $\theta\in(0, 1)$, $q\in(0, \infty]$ *и*

$$\|\Gamma\|_{\theta q}\leqslant\|\Gamma\|_0^{1-\theta}\|\Gamma\|_1^{\theta}.$$

Эта теорема формулируется одинаково и для нормированных, и для кв. н. пространств. Иначе обстоит дело с интерполяцией билинейных отображений, где требуется введение нового понятия. Пусть квазинорма в кв. н. пространстве $\mathscr{E}$ удовлетворяет при некотором r, $0<r\leqslant 1$, неравенству

$$N^r(u+v|\mathscr{E})\leqslant N^r(u|\mathscr{E})+N^r(v|\mathscr{E}).$$

Тогда пространство $\mathscr{E}$ называют r-нормированным, а функционал N — r-нормой. Отметим, что во всяком кв. н. пространстве существуют r-нормы, эквивалентные основной квазинорме.

Теорема 3 ([11]). *Пусть* (A_0, A_1), (B_0, B_1), (C_0, C_1) — *интерполяционные пары кв. н. пространств, причем* C_i r_i-*нормировано,* $i=0,1$. *Пусть задано билинейное непрерывное отображение* $\Gamma: A_i\times B_i\to C_i$, $i=0,1$. *Пусть* $0<\theta<1$, $r_\theta^{-1}=(1-\theta)r_0^{-1}+\theta r_1^{-1}$ *и* $q_1^{-1}+q_2^{-1}\geqslant r_\theta^{-1}$.

Тогда $\Gamma: A_{\theta,q_1}\times B_{\theta,q_2}\to C_{\theta,q}$ *где*

$$\left.\begin{aligned} q&=\max(q_1,q_2), && \text{если } \min(q_1,q_2)<r_\theta\\ q^{-1}&=q_1^{-1}+q_2^{-1}-r_\theta^{-1}, && \text{если } \min(q_1,q_2)\geqslant r_\theta.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

При этом

$$\|\Gamma\|_{\theta,q_1,q_2,q}\leqslant c\|\Gamma\|_0^{1-\theta}\|\Gamma\|_1^{\theta}.\tag{18}$$

Случай, когда все рассматриваемые пространства A, B, C — нормированные (в частности, $r_0=r_1=r_\theta=1$) и q_1, $q_2\geqslant 1$, соответствует теореме Лионса — Питре [8].

Формула (17) содержит ограничения, которые усиливаются при уменьшении r_0, r_1. В связи с этим важно уметь определять максимальное для данного кв. н. пространства значение $r=r_{\max}$. Для классов $\mathfrak{S}_{p,q}$ при $\min(p, q)<1$ из результатов С. Ю. Ротфельда [3] следует, что $r_{\max}=\min(p, q)$. Для пространства $\mathfrak{S}_{1,q}$ при $1<q\leqslant\infty$ имеются r-нормы при любом $r<1$ (но не при $r=1$).

В применении к оценкам s-чисел теорема 3 недостаточна, так как в ней не учтены некоторые свойства отображений (13), (14).

Пусть $\Gamma: A\times B\to C$ — билинейное отображение, причём A — некоторое пространство измеримых функций, C — пространство операторов. Предположим, что для любых a_1, $a_2\in A$ с дизъюнктными носителями и любых b_1, $b_2\in B$ выполнено равенство

$$[\Gamma(a_1, b_1)]^*\Gamma(a_2, b_2)=0.\tag{19}$$

В этом случае назовем отображение Γ *полуортогональным.*

Тот же термин будем использовать, если взамен (19) выполнено равенство

$$\Gamma(a_1, b_1)[\Gamma(a_2, b_2)]^*=0. \qquad (19)^*$$

Если B также является пространством измеримых функций и при $a_1 \cdot a_2=0$, $b_1 \cdot b_2=0$, выполнены одновременно оба равенства (19), (19)*, то будем называть отображение Г *ортогональным*. Легко видеть, что отображение (13) полуортогонально, а отображение (14) — ортогонально.

Ниже формулируются теоремы об интерполяции билинейных полуортогональных и ортогональных отображений. Условимся говорить, что (A_0, A_1) — допустимая пара пространств Лоренца, если $A_i = L_{p_i, q_i}X$ при $p_0 \neq p_1$.

Теорема 4. *Пусть* (A_0, A_1) — *допустимая пара пространств Лоренца и* (B_0, B_1) — *произвольная интерполяционная пара кв. н. пространств. Пусть* $0<\delta_0$, $\delta_1<2$, $\delta_0 \neq \delta_1$ *и* $\Gamma: A_i \times B_i \to \mathfrak{S}_{\delta_i, \infty}$, $i=0,1$,— *билинейное непрерывное полуортогональное отображение. Пусть* $0<\theta<1$, $\delta^{-1} = (1-\theta)\delta_0^{-1} + \theta\delta_1^{-1}$, $q_1^{-1} + q_2^{-1} \geqslant \delta^{-1}$, $(q_1, q_2) \neq (\delta, \infty)$. *Тогда* $\Gamma: A_{\theta, q_1} \times B_{\theta, q_2} \to \mathfrak{S}_{\delta, q}$, *где*

$$\left.\begin{array}{ll} q = \max(q_1, q_2), & \textit{если } \min(q_1, q_2) < \delta; \\ & \textit{либо } \delta = q_2 < q_1; \\ q > q_2, & \textit{если } \delta = q_1 \leqslant q_2; \\ q^{-1} = q_1^{-1} + q_2^{-1} - \delta^{-1}, & \textit{если } \min(q_1, q_2) > \delta. \end{array}\right\} \qquad (20а)$$

При этом имеет место оценка (18).

Теорема 5. *Пусть* (A_0, A_1), (B_0, B_1) — *допустимые пары пространств Лоренца. Пусть* $0<\delta_0$, $\delta_1<\infty$, $\delta_0 \neq \delta_1$ *и* $\Gamma: A_i \times B_i \to \mathfrak{S}_{\delta_i, \infty}$, $i=0,1$,— *билинейное непрерывное ортогональное отображение. Пусть* $0<\theta<1$ *и* $q_1^{-1}+q_2^{-1} > \delta^{-1} = (1-\theta)\delta_0^{-1} + \theta\delta_1^{-1}$. *Тогда* $\Gamma: A_{\theta, q_1} \times B_{\theta, q_2} \to \mathfrak{S}_{\delta}$, *где*

$$\left.\begin{array}{l} q = \max(q_1, q_2), \textit{ если } \min(q_1, q_2) < \delta, \quad q_1 \neq q_2; \\ q > q_1, \textit{ если } q_1 = q_2 < \delta; \\ q > \max(q_1, q_2), \textit{ если } \min(q_1, q_2) = \delta; \\ q^{-1} = q_1^{-1} + q_2^{-1} - \delta^{-1}, \textit{ если } \min(q_1, q_2) > \delta. \end{array}\right\} \qquad (20б)$$

При этом имеет место оценка (18).

Если δ_0, $\delta_1>1$, то и $\delta>1$; следовательно, ограничения на q_1, q_2 в теоремах 4, 5 слабее, чем в теореме 3. Формулы (20) дают лучшее значение для q, нежели формула (17). Применение теорем 4, 5 к оценкам s-чисел во многих случаях приводит к точным (окончательным) результатам.

Приведем еще утверждение, аналогичное теореме 4 и относящееся к случаю, когда пространства образов совпадают между собой.

Теорема 6. *Пусть* (A_0, A_1) — *допустимая пара пространств Лоренца и* (B_0, B_1) — *произвольная интерполяционная пара кв. н. пространств. Пусть* $0<\delta<2$, $0<t\leqslant\leqslant\infty$ *и* $\Gamma: A_i\times B_i\to\mathfrak{S}_{\delta,t}$ $i=0, 1$ — *билинейное непрерывное полуортогональное отображение, и пусть* $\varkappa=\min(\delta, t)$. *Тогда для любых* $\theta\in(0, 1)$ *и* q_1, q_2 *таких, что*

$$q_1^{-1}+q_2^{-1}\geqslant\varkappa^{-1},\quad (q_1, q_2)\neq(\varkappa, \infty),$$

$\Gamma: A_{\theta,q_1}\times B_{\theta,q_2}\to\mathfrak{S}_{\delta,t}$, *и выполнена оценка вида* (18).

Сходный результат (его формулировку мы опустим) справедлив и для ортогональных отображений.

§ 3. Уточненные оценки s-чисел

Интерполяция оценки (9) приводит к неравенствам вида

$$N(T_a|\mathfrak{S}_{\delta,\beta})\leqslant CN(T|L_2Y\mathscr{E})N(a|L_{\lambda,\eta}X), \tag{21}$$

где $\mathscr{E}=B^{\alpha}_{p,q}Q^m$ или $\mathscr{E}=\mathscr{B}^{\alpha}_{p,q}R^m$. Ниже принято $\delta=\omega^{-1}$, где ω определено в (10).

Теорема 7. *Оценка* (21) *справедлива в каждом из следующих двух случаев*: 1) $X=Q^m$, $\mathscr{E}=B^{\alpha}_{p,q}Q^m$, $p\alpha\geqslant m$, $\beta=q\geqslant2$; $\lambda=\eta=2$ *при* $p\alpha>m$, $\lambda=\eta>2$ *при* $p\alpha=m$. 2) $X=R^m$, $\mathscr{E}=\mathscr{B}^{\alpha}_{p,q}R^m$, $p\alpha<m$, $p^{-1}-\alpha m^{-1}<1/2$ *и выполнено* (11); $q\geqslant2$, $q^{-1}+\eta^{-1}\geqslant\omega$, $(q, \eta)\neq(\infty, \delta)$; $\beta=q$ *при* $\eta<\delta$, $\beta>q$ *при* $\eta=\delta$ *и* $\beta^{-1}=q^{-1}+\eta^{-1}-\omega$ *при* $\eta>\delta$.

При доказательстве случая 1) используется теорема 2, при доказательстве случая 2) — теорема 4. База для интерполяции доставляется теоремой 1: мы полагаем $\alpha_0=\alpha-\varepsilon$, $\alpha_1=\alpha+\varepsilon$ и используем (15), (16) при этих значениях α и при соответствующих значениях λ. Для сравнения теоремы 7 с исходной теоремой 1 рассмотрим два частных случая оценки (21).

1. Пусть $\beta=q=\infty$. Тогда оценка (21) принимает вид

$$s_n(T_a)\leqslant Cn^{-\omega}N(T|L_2Y\mathscr{E})N(a|L_{\lambda,\eta}\ X). \qquad (22)$$

Здесь при $p\alpha>m$ $\mathscr{E}=H_p^\alpha Q^m$, $\lambda=\eta=2$; при $p\alpha=m$ $\mathscr{E}=H_p^\alpha Q^m$, $\lambda=\eta>2$; при $p\alpha<m$ $\mathscr{E}=\mathscr{H}_p^\alpha \boldsymbol{R}^m$ выполнено (11) и $\eta<\delta$. Контроль, основанный на сравнении с (7), (8), показывает, что оценка (22) точна по порядку убывания s-чисел и по отношению к классам ядер. Если в условиях теоремы 7 $q<\infty$, то $s_n(T_a)=o(n^{-\omega})$. Это прямо вытекает из формулировки при $p\alpha\geqslant m$ и без труда доказывается при $p\alpha<m$. Таким образом, неулучшаемые „индивидуальные“ оценки s-чисел связаны с принадлежностью ядер классам Никольского.

2. Пусть $p=q=2$ и $2\alpha>m$. Тогда оценка (21) принимает вид

$$\sum_n n^{2\alpha/m}s_n^2(T_a)\leqslant C^2N^2(T\,|\,L_2YW_2^\alpha Q^m)\,N^2(a\,|\,L_2Q^m).$$

Это существенно улучшает для рассматриваемого случая результат теоремы 1. Сравнение с рядами Фурье показывает, что оценка точна.

Рассмотрим теперь случай разностных ядер

$$T(x,\ y)=F(x-y). \qquad (23)$$

Основной интерес при этом представляет исследование операторов T_{ab} вида (4). Дело в том, что для ядер (23) переменные x, y равноправны и поэтому естественно искать оценки $s_n(T_{ab})$ при симметричных условиях на веса. Если $p\alpha\geqslant m$, то из теоремы 7 нетрудно извлечь результаты нужного характера для $X=Y=Q^m$, a, $b\in L_\lambda Q^m$ ($\lambda=2$ при $p\alpha>m$, $\lambda>2$ при $p\alpha=m$). При $p\alpha<m$ такого рода следствия являются грубыми. Однако повторная интерполяция позволяет получить более точные результаты. Именно справедлива

Теорема 8. *Пусть* $X=Y=\boldsymbol{R}^m$ *и* $F\in\mathscr{B}_{p,q}^\alpha\boldsymbol{R}^m$ *при* $p\geqslant 1$, $p\alpha<m$, $0<q\leqslant\infty$. *Пусть* $a\in L_{\lambda_1,r_1}\boldsymbol{R}^m$, $b\in L_{\lambda_2,r_2}\boldsymbol{R}^m$,

причем

$$2 < \lambda_1, \lambda_2 < \infty; \quad \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} = 1 - p^{-1} + \alpha m^{-1}; \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} &r_1^{-1} + r_2^{-1} \geqslant \varkappa^{-1}, \text{ если } \varkappa \overset{\text{def}}{=} \min(\delta, q) < 2, \text{ либо } \delta = q = 2; \\ &r_1^{-1} + r_2^{-1} > \varkappa^{-1}, \text{ если } \varkappa \geqslant 2, \ (\delta, q) \neq (2, 2). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Тогда для оператора T_{ab} с ядром (23) *справедлива оценка*

$$N(T_{a,b} | \mathfrak{S}_{\delta,q}) \leqslant CN(F \mid \mathscr{B}_{p,q}^{\alpha} R^m)\, N(a \mid L_{\lambda_1,r_1})\, N(b \mid L_{\lambda_2,r_2}). \tag{26}$$

Оценка (26) точна. Отметим, что при $p^{-1} - \alpha m^{-1} > 1/2$ заведомо $\delta > 2$, т. е. оператор $T_{a,b}$, вообще говоря, не принадлежит классу Гильберта — Шмидта $\mathfrak{S}_2$. Условиями теорем 1 и 7 такая возможность не допускалась.

Поясним интерполяцию, приводящую к теореме 8, ограничиваясь случаем $p^{-1} - \alpha m^{-1} < 1/2$. Применим оценку (21) к ядру $F(x-y)\, b(y)$, $b \in L_2 R^m$. Для оператора T_{ab} с ядром (23) тогда получим

$$N(T_{a,b} | \mathfrak{S}_{\delta,\beta}) \leqslant CN(F \mid \mathscr{B}_{p,q}^{\alpha} R^m) N(a | L_{\lambda,\eta} R^m)\, N(b | L_2 R^m). \tag{27}$$

Для разностных ядер эту оценку можно распространить с $q \geqslant 2$ на любые $q > 0$. При фиксированной функции F неравенство (27) означает, что

$$\Gamma_3 : L_{\lambda,\eta} R^m \times L_2 R^m \to \mathfrak{S}_{\delta,\beta}, \quad \|\Gamma_3\| \leqslant CN(F \mid \mathscr{B}_{p,q}^{\alpha} R^m). \tag{28}$$

Здесь Γ_3 — отображение (14). Меняя роли переменных x, y, получаем аналогичное соотношение. Вместе с (28) оно служит базой для интерполяции; сама интерполяция основана на теореме 6.

Теорема 8 содержит в себе следующие „индивидуальные“ оценки для s-чисел:

Теорема 8а. *Пусть* $F \in \mathscr{H}_p^{\alpha} R^m$, $p\alpha < m$, $a \in L_{\lambda_1} R^m$, $b \in L_{\lambda_2} R^m$ *и выполнено* (24). *Тогда для оператора T_{ab} с ядром* (23)

$$s_n(T_{ab}) \leqslant Cn^{-\omega} N(F \mid \mathscr{H}_p^{\alpha})\, N(a \mid L_{\lambda_1})\, N(b \mid L_{\lambda_2}).$$

Из теорем 7, 8, в частности, можно получить условия включений типа $T_{a,b} \in \mathfrak{S}_r$, в том числе — признаки ядерности ($r=1$). Однако для получения признаков ядерности более эффективен другой подход (см., например, [12]). Здесь мы приведем один результат в этом направлении. Обозначим через $W_2^{\alpha,\beta}\boldsymbol{R}^m$ пополнение класса $C_0^\infty\boldsymbol{R}^m$ относительно метрической формы

$$N^2(u\,|\,W_2^{\alpha,\beta}\boldsymbol{R}^m) \overset{\mathrm{def}}{=} \overset{0}{N^2}(u\,|\,W_2^{\alpha}\boldsymbol{R}^m) + \overset{0}{N^2}(u\,|\,W_2^{\beta}\boldsymbol{R}^m).$$

Теорема 9. *Пусть* $X=\boldsymbol{R}^m$, $a\in L_2\boldsymbol{R}^m$ *и* $T\in\in L_2YW_2^{\alpha,\beta}\boldsymbol{R}^m$ *при* $0\leqslant\beta<m/2<\alpha$. *Тогда* $\boldsymbol{T}_a\in\mathfrak{S}_1$ *и*

$$N(\boldsymbol{T}_a\,|\mathfrak{S}_1)\leqslant CN(T\,|\,L_2YW_2^{\alpha,\beta}\boldsymbol{R}^m)\,N(a\,|\,L_2\boldsymbol{R}^m).$$

§ 4. Некоторые специальные случаи

Здесь рассматриваются некоторые специальные классы ядер, представляющие интерес для приложений. Не все относящиеся к этим случаям результаты в полном объеме следуют из общих теорем § 3. Однако применение сходной техники приводит к нужным оценкам. Исключение составляет результат п. 4, для получения которого потребовались несколько иные средства.

1. Пусть X, $Y\subset\boldsymbol{R}^m$. Рассмотрим ядро

$$T(x,\ y)=\varphi(x,\ y)\,|x-y|^k,\ k>-m. \tag{29}$$

Соответствующие оценки s-чисел имеют вид

$$s_n(\boldsymbol{T}_{ab})\leqslant Cn^{-\left(1+\frac{k}{m}\right)}N(\varphi\,|\,L_\infty Y\mathscr{E})\,N(a\,|\,L_{\lambda_1}X)\quad N(b|L_{\lambda_2}Y). \tag{30}$$

Теорема 10. *Пусть* $X=Q^m$ *при* $k\geqslant0$, $X=\boldsymbol{R}^m$ *при* $-m<k<0$; $\mathscr{E}=H_p^sX$, $p\geqslant2$, $ps>m$, $s>k+m/2$ *в случае* $k\geqslant-m/2$; $\mathscr{E}=L_\infty X$ *в случае* $-m<k<-m/2$. *Пусть, кроме того, выполнены следующие условия:*

1) *при* $k>0$ $\lambda_1=\lambda_2=2$;

2) *при* $k=0$ $\lambda_1>2$, $\lambda_2=2$, *либо* $\lambda_1=2$, $\lambda_2>2$;

3) *при* $k<0$ $2<\lambda_1$, $\lambda_2<\infty$, $\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1}=1+km^{-1}$.

Тогда для оператора $\boldsymbol{T}_{ab}$ *с ядром* (29) *справедлива оценка* (30).

Доказательство для $k>-m/2$ опирается на то, что при $\alpha=k+m/2$ функция $|z|^k$ входит в класс $H_2^\alpha Q^m$ ($k\geqslant0$

и в класс $\mathscr{H}_2^\alpha \boldsymbol{R}^m(-m/2<k<0)$. Поэтому оценка (30) при $\varphi\equiv 1$ прямо вытекает из теорем 7, 8а. Условия на φ в теореме 10 таковы, что включение φ в ядро не ухудшает порядка оценок (см. по этому поводу § 5, где обсуждается проблема множителей в классах ядер). Подчеркнем, что при $k<-m/2$ никаких условий гладкости на φ не требуется. Этот важный факт в существенном установлен Г. П. Костометовым [13].

Оценка (30) сохраняется для ядер $\varphi(x, y)F(x-y)$, где F — положительно однородная функция порядка k. Та же оценка справедлива для ядер типа $\varphi(x, y)P(x-$ $-y)\log|x-y|$, где P — полином порядка $k\geqslant 0$.

Сравнение с (7), (8) показывает, что эти результаты точны как по порядку оценок, так и по отношению к классам весов.

2. Если ядро T имеет особенности лишь на границе, то по сравнению с оценкой (30) s-числа убывают быстрее. Проиллюстрируем это на примере оператора в L_2Q^m с ядром

$$B(x, y)=[|x'-y'|^2+|x''+y''|^2]^{k/2},\quad k>-m. \tag{31}$$

Здесь $x', y'\in Q^{m_1}$, $x'', y''\in Q^{m_2}$, $m_1+m_2=m$, $m_1>0$, $m_2\geqslant 0$. Для s-чисел оператора $\boldsymbol{B}$ с ядром (31) при $a=b\equiv 1$ можно получить оценку $s_n(\boldsymbol{B})=o\left(n^{-(m+k)m_1^{-1}}\right)$. Для ядра $B(x, y)=|x+y|^{-k}$ (т. е. в случае $m_1=0$) оценка имеет вид $s_n(\boldsymbol{B})=o\left(e^{-\eta\sqrt{n}}\right)$, $\eta=\eta(m, k)>0$.

3. В $L_2\boldsymbol{R}^m$ рассмотрим оператор $\boldsymbol{E}_{gh}$ с ядром

$$E_{gh}(x, y)=g(x)h(y)\ \exp\ (ixy).$$

Для него можно указать удобные условия принадлежности классам $\mathfrak{S}_r$, $0<r<\infty$. Определим функциональные пространства G_r, $0<r<2$, которые участвуют в формулировке. Пусть $\boldsymbol{R}^m$ разложено в решетку единичных кубов $\{Q_k\}$, $k=1, 2, \ldots$. Включение $f\in G_r$ означает, что $f\in L_{2,\,\mathrm{loc}}\boldsymbol{R}^m$ и

$$N^r(f\,|\,G_r)\overset{\text{def}}{=}\sum_k N^r(f\,|\,L_2Q_k)<\infty.$$

Теорема 11. *Пусть* $g, h\in\mathscr{E}_r$, *где* $\mathscr{E}_r=L_r\boldsymbol{R}^m$ *при* $2\leqslant$ $\leqslant r<\infty$ *и* $\mathscr{E}_r=G_r$ *при* $0<r<2$. *Тогда* $\boldsymbol{E}_{gh}\in\mathfrak{S}_r$ *и*

$$N(\boldsymbol{E}_{gh}|\mathfrak{S}_r)\leqslant C_rN(g|\mathscr{E}_r)N(h|\mathscr{E}_r).$$

4. Пусть A — оператор в L_2R^m с ядром

$$A(x, y) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2}(1+|y|^2)^{-\beta/2}(1+|x-y|^2)^{-\gamma/2} \quad (\gamma>0). \tag{32}$$

Легко проверить, что для компактности оператора A необходимы условия $\alpha+\beta>0$, $\gamma+\alpha+\beta>m$, $2(\gamma+\alpha)>m$, $2(\gamma+\beta)>m$. При этом одно из чисел α, β может быть отрицательным, т. е. ядро может содержать растущий множитель. При перечисленных условиях на показатели справедлива оценка

$$s_n(A) = o\left(n^{-\frac{\alpha+\beta}{m}}\right). \tag{33}$$

Эта оценка будет получена в Добавлении 2.

§ 5. Множители в классах интегральных ядер

Материал этого параграфа позволяет существенно расширить область применения оценок из § 3, 4. С другой стороны, он полезен при решении ряда вопросов, не связанных непосредственно с оценками s-чисел. Впрочем, эти вопросы здесь не обсуждаются; с ними можно ознакомиться по работе [2]. Там же более полно изложена сама постановка задачи о множителях.

Пусть $X \subset R^{m_1}$, $Y \subset R^{m_2}$ и φ — измеримая функция на $X \times Y$. Сопоставим ей линейное преобразование M_φ над операторами, действующими из L_2X в L_2Y. Именно, если T — интегральный оператор с ядром T, то $Q = M_\varphi T$ — интегральный оператор с ядром φT:

$$(Tu)(y) = \int_X T(x, y)\, u(x)\, dx;$$

$$(Qu)(y) = \int_X \varphi(x, y)\, T(x, y)\, u(x)\, dx.$$

Преобразование M_φ назовем „преобразованием множителей“. Фиксируем какой-либо из классов $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_\infty$, $\mathfrak{S}_{p,q}$, который обозначим через $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathscr{M}(\mathfrak{S})$ — множество функций φ таких, что M_φ непрерывно отображает $\mathfrak{S}$ в себя. Если $\varphi \in \mathscr{M}(\mathfrak{S})$, то отображение M_φ, первоначально определенное лишь на интегральных операторах $T \in \mathfrak{S}$, удается распространить на весь класс $\mathfrak{S}$.

Множество $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$ является алгеброй и в нем естественно определяется квазинорма (если $\mathfrak{S}$ нормировано — то норма) $[\varphi]\mathfrak{S}$. Наиболее важным для приложений является пространство $\mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}(\mathfrak{R})$. Норму в нем будем обозначать через $[\varphi]$.

Проблема множителей в классах ядер состоит в аналитическом описании пространств $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$. Очевидно, $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_2) = L_\infty(X \times Y)$. Для других классов $\mathcal{M}(\mathfrak{S})$ явного описания дать не удается. Отметим соотношения общего характера:

1) $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_1) = \mathcal{M}(\mathfrak{S}_\infty) = \mathcal{M}$, $[\varphi]\mathfrak{S}_1 = [\varphi]\mathfrak{S}_\infty = [\varphi]$;

2) при $0 < t,\ p,\ q \leqslant \infty$, $|p^{-1} - 1/2| < |t^{-1} - 1/2|$ справедливы непрерывные вложения

$$\mathcal{M} \cdot (\mathfrak{S}_t) \subset_{\rightarrow} \mathcal{M}(\mathfrak{S}_{p,q}) \subset_{\rightarrow} \mathcal{M}(\mathfrak{S}_2) = L_\infty(X \times Y). \tag{34}$$

В частности, при $1 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$,

$$\mathcal{M} \subset_{\rightarrow} \mathcal{M}(\mathfrak{S}_{p,q}) \subset_{\rightarrow} L_\infty(X \times Y).$$

Аналитические результаты о множителях опираются на следующее утверждение. Пусть φ_{ab} — оператор вида (4) с ядром φ.

Теорема 12. *При $0 < r \leqslant 1$ имеет место равенство*

$$[\varphi]\mathfrak{S}_r = \sup_{N(a|L_2X) = N(b|L_2Y) = 1} \acute{N}(\varphi_{ab} | \mathfrak{S}_r).$$

В частности, $[\varphi] = \sup N(\varphi_{ab} | \mathfrak{S}_1)$.

Теорема 12 дает возможность применить при исследовании множителей результаты § 3. При этом выясняется важность оценок, равномерных относительно „весов“ a, b.

Теорема 13. 1) *Пусть* $X = \boldsymbol{R}^m$ *и* $0 \leqslant 2\beta < m < 2\alpha$. *Тогда*

$$L_\infty Y W_2^{\alpha,\beta} \boldsymbol{R}^m \subset_{\rightarrow} \mathcal{M}.$$

2) *Пусть* $X = Q^m$, $2\alpha > m$ *и* $r^{-1} < \alpha m^{-1} + \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$L_\infty Y H_2^\alpha Q^m \subset_{\rightarrow} \mathcal{M}(\mathfrak{S}_r).$$

3) *Пусть* $X = \boldsymbol{R}^m$, $p\alpha > m$, $\left| r^{-1} - \frac{1}{2} \right| \leqslant p^{-1}$, $p \geqslant 2$.

Тогда

$$L_\infty Y W_p^\alpha \boldsymbol{R}^m \subset_{\rightarrow} \mathcal{M}(\mathfrak{S}_r).$$

Отметим, что в условиях п. 3 заведомо $r\geqslant 1$, в условиях п. 2 допустимо $r<1$.

Результаты для других классов получаются на основании вложений (34). Условия включений вида $\varphi\in\in\mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\delta,\infty})$ используются, в частности, при доказательстве теоремы 9.

Добавление 1. Интерполяционные соотношения для классов $\mathscr{W}_p^\alpha$, $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha$

1. Интерполяционные свойства классов W_p^α, $B_{p,q}^\alpha$ хорошо известны и их применение не требует комментариев. В настоящем Добавлении, имеющем в основном методический характер, мы покажем, что аналогичными интерполяционными свойствами обладают введенные в § 1 функциональные пространства $\mathscr{W}_p^\alpha\boldsymbol{R}^m$, $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha\boldsymbol{R}^m$. Мы будем предполагать, что $p\alpha<m$, поскольку лишь этот случай интересен для приложений. С другой стороны, именно при $p\alpha<m$ возникают содержательные вопросы в теории самих пространств [2] $\mathscr{W}_p^\alpha\boldsymbol{R}^m$, $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha\boldsymbol{R}^m$.

Мы покажем, что для вещественного интерполяционного метода Лионса — Питре справедливы соотношения:

$$(\mathscr{W}_p^{\alpha_0}, \mathscr{W}_p^{\alpha_1})_{\theta,q}=\mathscr{B}_{p,q}^{\alpha_\theta} \tag{Д.1}$$

$$0\leqslant\alpha_0<\alpha_1<mp^{-1};\ 0<\theta<1;\ \alpha_\theta=(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1;$$
$$1\leqslant p<\infty,\quad 0<q\leqslant\infty.$$

Вопрос об интерполяции пространств $\mathscr{W}_p^\alpha$, $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha$ мы сведем к аналогичному вопросу для пространств классов функций, различающихся на полиномы фиксированной степени (пространства $\mathscr{L}_p^\alpha$ С. Л. Соболева и их аналоги $\mathscr{L}_{p,q}^\alpha$). Интерполяция таких пространств рассмотрена Питре [14], причем здесь условие $p\alpha<m$ уже не обязательно. Нужное сведение основано на том, что при $p\alpha<<m$ в каждом элементе (классе) пространств $\mathscr{L}_p^\alpha$, $\mathscr{L}_{p,q}^\alpha$ может быть выделен единственный канонический пред-

[2] В дальнейшем символ R^m в обозначениях пространств и (квази)норм часто опускается. Интеграл без указания области интегрирования считается распространенным по R^m. Через C обозначаются различные постоянные.

ставитель, „убывающий“ при $|x| \to \infty$. Это убывание во всяком случае обеспечивает конечность интеграла

$$K_p(u) = \int (1 + |x|^m)^{-1} |u|^p \, dx \tag{Д.2}$$

— „младшего“ члена нормы (6). Подобные рассмотрения можно было бы в значительной мере основывать на результатах С. Л. Соболева [15] и О. В. Бесова [16] о плотности финитных функций в $\mathscr{L}_p^\alpha$, $\mathscr{L}_{p,q}^\alpha$, $q < \infty$. Мы, однако, предпочитаем другой (более прямой) путь, на котором для выделения канонического представителя служит специальный оператор проектирования на соответствующее пространство полиномов. При таком способе случай пространства $\mathscr{H}_p^\alpha = \mathscr{B}_{p,\infty}^\alpha$ не требует отдельных рассмотрений.

2. Для пространств $\mathscr{W}_p^\alpha$ старший член нормы вида (6) $\overset{0}{N}(\cdot \,|\, W_p^\alpha)$ определяется при целых α первым, а при нецелых α — вторым из нижеследующих выражений:

$$\left[\int |\nabla_\alpha u|^p \, dx\right]^{1/p}; \quad \left[\iint \frac{|\nabla_{[\alpha]} u(x) - \nabla_{[\alpha]} u(y)|^p}{|x-y|^{m+p(\alpha-[\alpha])}} \, dx dy\right]^{1/p}.$$

Функция u, определенная в $\boldsymbol{R}^m$, принадлежит $\mathscr{W}_p^\alpha$, $p\alpha < m$, если

$$N(u \,|\, \mathscr{W}_p^\alpha) \overset{\text{def}}{=\!=} \overset{0}{N}(u \,|\, W_p^\alpha) + K_p^{1/p}(u) < \infty. \tag{Д.3}$$

В шкалу $\mathscr{W}_p^\alpha$ удобно включить также пространство $\mathscr{W}_p^0$. При этом в (Д.3) следует принять $\overset{0}{N}(\cdot \,|\, W_p^0) = N(\cdot \,|\, L_p)$. Норма (Д.3) при $\alpha = 0$ эквивалентна стандартной норме в L_p.

Сопоставим далее любой функции $u \in L_{p,\,\mathrm{loc}} \boldsymbol{R}^m$ ее „модуль гладкости порядка r“:

$$\omega_p^{(r)}(u; t) = \sup_{|h| \leqslant t} \left\{\int \left| \sum_{0 \leqslant j \leqslant r} (-1)^j \binom{r}{j} u(x + jh) \right|^p dx\right\}^{1/p}, \quad t > 0.$$

Пусть теперь

$$\overset{0}{N}_{l_1, l_2}(u \,|\, B_{p,q}^\alpha) = \left\{\int_0^\infty \left[\frac{\omega_p^{(l_2)}(\nabla_{l_1} u; t)}{t^{\alpha - l_1}}\right]^q \frac{dt}{t}\right\}^{1/q}, \quad 0 < q < \infty;$$

$$\overset{0}{N}_{l_1,l_2}\left(u \mid B^{\alpha}_{p,\infty}\right) = \sup_{t>0} \frac{\omega_p^{(l_2)}(\nabla_{l_1} u; t)}{t^{\alpha - l_1}}.$$

Здесь $l_1+l_2>\alpha$, причем $l_2\geqslant 2$ при целых α и $l_2\geqslant 1$ при нецелых α. Функция u принадлежит пространству $\mathscr{B}^{\alpha}_{p,q}$, $p\alpha<m$, если

$$N_{l_1,l_2}\left(u \mid \mathscr{B}^{\alpha}_{p,q}\right) \overset{\text{def}}{=} \overset{0}{N}_{l_1,l_2}\left(u \mid B^{\alpha}_{p,q}\right) + K_p^{1,p}(u) < \infty. \quad (\text{Д}.4)$$

В обозначении пространств не отражена зависимость $\mathscr{B}^{\alpha}_{p,q}$ от l_1 l_2, поскольку в конечном счете выясняется, что изменение l_1, l_2 приводит лишь к эквивалентной перенормировке пространства $\mathscr{B}^{\alpha}_{p,q}$. Можно, например, ограничиться значениями $l_1=0$, $l_2=[\alpha]+1$.

3. Перейдем теперь к описанию пространств $\mathscr{L}^{\alpha}_{p}$, $\mathscr{L}^{\alpha}_{p,q}$. Через $\mathscr{P}_s$, $s>0$, ниже обозначается линейное пространство полиномов в $\boldsymbol{R}^m$ степени $<s$. Пусть функция u определена в $\boldsymbol{R}^m$, $u\in W^{\alpha}_{p,\,\mathrm{loc}}\left(u\in B^{\alpha}_{p,q,\,\mathrm{loc}}\right)$ и пусть

$$\overset{0}{N}\left(u \mid W^{\alpha}_{p}\boldsymbol{R}^m\right) < \infty \quad \left(\overset{0}{N}_{l_1,l_2}\left(u \mid B^{\alpha}_{p,q}\boldsymbol{R}^m\right) < \infty\right).$$

Функции, различающиеся на полином соответствующего порядка r, отождествляются. Отождествление (факторизация) приводит к пространствам $\mathscr{L}^{\alpha}_{p}$, $\mathscr{L}^{\alpha}_{p,q}$, элементы которых — классы $\hat{u}=u+\mathscr{P}_r$. Здесь $r=\alpha$ для $\mathscr{L}^{\alpha}_{p}$; для пространства $\mathscr{L}^{\alpha}_{p,q}$ $r=l_1+l_2$, т. е. зависит от выбора функционала $\overset{0}{N}_{l_1,l_2}$. В $\mathscr{L}^{\alpha}_{p}$ вводится норма

$$N\left(\hat{u} \mid \mathscr{L}^{\alpha}_{p}\right) \overset{\text{def}}{=} \overset{0}{N}\left(u \mid W^{\alpha}_{p}\right), \quad u\in\hat{u}.$$

В $\mathscr{L}^{\alpha}_{p,q}$ определяется квазинорма (при $q\geqslant 1$ — норма)

$$N_{l_1,l_2}\left(\hat{u} \mid \mathscr{L}^{\alpha}_{p,q}\right) \overset{\text{def}}{=} \overset{0}{N}_{l_1,l_2}\left(u \mid B^{\alpha}_{p,q}\right), \quad u\in\hat{u}.$$

Пространства $\mathscr{L}^{\alpha}_{p}$ и $\mathscr{L}^{\alpha}_{p,q}$ полны. Между пространствами $\mathscr{L}^{\alpha}_{p,q}$ при различных l_1, l_2 имеется естественный изоморфизм, а соответствующие (квази)нормы эквивалентны. Кроме того, при нецелых α пространства $\mathscr{L}^{\alpha}_{p}$ и $\mathscr{L}^{\alpha}_{p,p}$ можно отождествить. Несущественная зависимость от l_1, l_2 в обозначении пространств $\mathscr{L}^{\alpha}_{p,q}$ отражаться не будет. Имеет место интерполяционное соотношение

$$(\mathscr{L}_p^{\alpha_0}, \mathscr{L}_p^{\alpha_1})_{\theta,q} = \mathscr{L}_{p,q}^{\alpha_\theta} \qquad (\text{Д. } 5)$$

$$(0 \leqslant \alpha_0 < \alpha_1 < \infty; \quad 0 < \theta < 1; \quad \alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1;$$
$$1 \leqslant p < \infty, \ 0 < q \leqslant \infty),$$

которое следует толковать следующим образом. Элементы всех входящих в (Д.5) пространств следует считать классами функций, определенных с точностью до одного и того же пространства полиномов $\mathscr{P}_s$. При этом в случае необходимости следует „насильственно" увеличить соответствующие значения r, сохранив естественный изометрический изоморфизм с исходными пространствами. В частности, такое увеличение r заведомо необходимо при $\alpha_0 = 0$ $(\mathscr{L}_p^0 \overset{\text{def}}{=} L_p)$.

По поводу обсуждаемых в настоящем пункте свойств пространств $\mathscr{L}_p^\alpha$, $\mathscr{L}_{p,q}^\alpha$ см. работы Питре [14, 17]. Как мы уже упоминали, условие $p\alpha < m$ здесь не обязательно.

4. В случае $p\alpha < m$ мы укажем естественную процедуру, которая позволит различать функции, входящие в один и тот же класс $\hat{u}$ $(\hat{u} \in \mathscr{L}_p^\alpha$ или $\hat{u} \in \mathscr{L}_{p,q}^\alpha)$. Пусть r — число, определенное в п. 3. В множестве $\mathscr{P}_r$ введем норму: для определенности положим $n(f|\mathscr{P}_r) = \max\limits_{|x| \leqslant 1} |f(x)|$. Через $\mathscr{D}_\rho$ будем обозначать шар $|x| < \rho$, через P_ρ — ортопроектор в $L_2\mathscr{D}_\rho$ на $\mathscr{P}_r$. В $B_{p,q}^\alpha \mathscr{D}_1$ можно ввести эквивалентную норму с помощью младшего члена $N(P_1 v | L_p \mathscr{D}_1)$. Тогда

$$\int\limits_{D_1} |v|^p \, dx \leqslant C \left[\overset{0}{N} (v \,|\, B_{p,q}^\alpha \mathscr{D}_1) + N(P_1 v \,|\, L_p \mathscr{D}_1) \right]^p.$$

Применим это неравенство к функции $v - P_1 v$ и сделаем преобразование координат $x \to \rho^{-1} x$. Тогда, учитывая свойство однородности функционала $\overset{0}{N}(\cdot \,|\, B_{p,q}^\alpha)$, получаем

$$\int\limits_{\mathscr{D}_\rho} |v - P_\rho v|^p \, dx \leqslant C \rho^{p\alpha} \overset{0}{N}{}^p (v \,|\, B_{p,q}^\alpha \mathscr{D}_\rho). \qquad (\text{Д.}6)$$

Пусть теперь $u \in \mathscr{L}_{p,q}^\alpha$. Для любого „представителя" $u \in \hat{u}$

из (Д.6) вытекает

$$\int_{\mathscr{D}_\rho} |P_\rho u - P_{2\rho} u|^p\,dx \leqslant C\rho^{p\alpha} \overset{0}{N}{}^p(u \mid B^\alpha_{p,q} R^m) =$$

$$= C\rho^{p\alpha} \overset{0}{N}{}^p(\hat{u} \mid \mathscr{L}^\alpha_{p,q}). \qquad \text{(Д.7)}$$

Полагая $f_\rho = P_\rho u - P_{2\rho} u$, $\rho \geqslant 1$, имеем в силу (Д.7)

$$n^p(f_\rho \mid \mathscr{P}_r) \leqslant \max_{x \in \mathscr{D}_\rho} |f_\rho(x)|^p \leqslant C\rho^{-m} \int_{\mathscr{D}_{\bar\rho}} |f_\rho(x)|^p\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C\rho^{p\alpha - m} \overset{0}{N}{}^p(\hat{u} \mid \mathscr{L}^\alpha_{p,q}). \qquad \text{(Д.8)}$$

Выбирая $\rho = 2^n$, из (Д.8) вследствие $p\alpha < m$ получаем, что полиномы $P_{2^n} u$ при $n \to \infty$ равномерно сходятся в $\mathscr{D}_1$ (а следовательно, и на любом компакте в R^m) к полиному, который мы обозначим через $P_\infty u$. Рассуждение не изменится, если вместо $\hat{u} \in \mathscr{L}^\alpha_{p,q}$ предположить $\hat{u} \in \mathscr{L}^\alpha_p$. Нетрудно проверить также, что $P_\rho u \to P_\infty u$, если $\rho \to \infty$ по любому закону (а не только при $\rho = 2^n$). Отметим, что $P_\infty = P^2_\infty$, т. е. P_∞ — оператор проектирования на пространство $\mathscr{P}_r$. Мы доказали

Предложение 1. *Пусть $\hat{u} \in \mathscr{L}^\alpha_{p,q}$ или $u \in \mathscr{L}^\alpha_p$, $p\alpha < m$. Пусть $u \in \hat{u}$ и пусть P_ρ — ортопроектор в $L_2\mathscr{D}_\rho$ на $\mathscr{P}_r$. Тогда на любом компакте полиномы $P_\rho u$ при $\rho \to \infty$ равномерно сходятся к некоторому полиному $P_\infty u \in \mathscr{P}_r$. Оператор P_∞ есть проектор на подпространство $\mathscr{P}_r$.*

Полиномы $P_\infty u$ позволяют различать функции u, входящие в один и тот же класс u. Мы будем называть каноническим тот представитель $u \in \hat{u}$, для которого $P_\infty u = 0$. На $\mathscr{L}^\alpha_{p,q}$ и $\mathscr{L}^\alpha_p$ определим отображение

$$J: \hat{u} \to u, \quad u \in \hat{u}, \quad P_\infty u = 0, \qquad \text{(Д.9)}$$

пользуясь которым можно трактовать пространства $\mathscr{L}^\alpha_{p,q}$, $\mathscr{L}^\alpha_p$ (при $p\alpha < m$) как пространства функций. Оператор J, по существу, зависит только от r, но не от основных параметров α, p, q.

Ниже мы убедимся, что условием $P_\infty u = 0$ выделяется представитель, для которого во всяком случае конечен интеграл (Д. 2). Предварительно установим

Предложение 2. *Пусть для* $u \in L_{p,\,\mathrm{loc}}$ *конечен интеграл* (Д. 2). *Тогда полиномы* $P_\rho u$ *при* $\rho \to \infty$ *равномерно сходятся к нулю в любом шаре* $\mathscr{D} \subset R^m$.

Доказательство. Для любых $\rho > \rho_0 > 0$ имеем

$$\max_{|x| \leqslant \rho_0} |(P_\rho u)(x)|^p \leqslant \max_{|x| \leqslant \rho} |(P_\rho u)|^p = \max_{|y| \leqslant 1} |P_1[u(\rho y)]|^p \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{\mathscr{D}_1} |u(\rho y)|^p\, dy = C\rho^{-m} \int_{\mathscr{D}_\rho} |u(x)|^p\, dx, \qquad (\text{Д}.10)$$

откуда

$$\max_{|x| \leqslant \rho_0} |(P_\rho u)(x)|^p \leqslant CK_p(u). \qquad (\text{Д}.11)$$

Из (Д.11) следует, что нужную сходимость достаточно проверять на плотном (относительно метрики интеграла K_p) множестве финитных функций. Но для таких функций сходимость $P_\rho u$ к нулю прямо следует из (Д.10).

5. Теперь мы покажем, что отображение J, определенное в (Д. 9), устанавливает изоморфизм между $\mathscr{L}_p^\alpha$ и $\mathscr{W}_p^\alpha$.

Предложение 3. *Пусть* $\hat{u} \in \mathscr{L}_p^\alpha$, $p\alpha < m$, $u \in \hat{u}$. *Тогда следующие условия эквивалентны*: (а) $u = J\hat{u}$, *т. е.* $P_\infty u = 0$; (б) *имеет место оценка (неравенство Харди)*

$$\int |u|^p |x|^{-p\alpha}\, dx \leqslant CN^p(\hat{u} \mid \mathscr{L}_p^\alpha) = C\overset{0}{N^p}(u \mid W_p^\alpha R^m); \quad (\text{Д}.12)$$

(*в*) *имеет место оценка*

$$K_p(u) \leqslant CN^p(\hat{u} \mid \mathscr{L}_p^\alpha). \qquad (\text{Д}.13)$$

Доказательство. Из (б), очевидно, следует (в). Из (в) вытекает (а) вследствие предложения 2. Остается показать, что из (а) следует (б). Обозначим через Π непрерывный оператор продолжения $\Pi: W_p^\alpha \mathscr{D}_1 \to W_p^\alpha R^m$, причем $(\Pi v)(x) = 0$ при $|x| > 2$. Функция $\tilde{v} = \Pi v$ финитна, а потому для нее справедливо неравенство Харди [3]

$$\int |\tilde{v}|^p |x|^{-p\alpha}\, dx \leqslant C\overset{0}{N^p}(\tilde{v} \mid W_p^\alpha R^m).$$

---

[3] Для нецелых α по поводу неравенства Харди см. [18, 19], где рассмотрен случай $m=1$. Для $m>1$ доказательство, принадлежащее В. А. Солонникову, приведено в [2].

Это приводит к соотношению

$$\int\limits_{\mathscr{D}_1} |v|^p |x|^{-p\alpha} dx \leqslant C \left[\overset{0}{N} (v \mid W_p^\alpha \mathscr{D}_1) + N (P_1 v \mid L_p \mathscr{D}_1) \right]^p.$$

Полагая $v = u - P_1 u$ и делая замену $x \to \rho^{-1} x$, получаем

$$\int\limits_{\mathscr{D}_\rho} |u - P_\rho u|^p |x|^{-p\alpha} dx \leqslant C \overset{0}{N}{}^p (u \mid W_p^\alpha \mathscr{D}_\rho) \leqslant C N^p (\hat{u} \mid \mathscr{L}_p^\alpha). \tag{Д.14}$$

Учитывая, что $P_\rho u \to P_\infty u$ и $P_\infty u = 0$, из (Д.14) по лемме Фату получаем оценку (Д.12).

Подчеркнем, что неравенство Харди в форме (Д.12) отличается от своего стандартного варианта тем, что условие на поведение $u(x)$ при $|x| \to \infty$ сведено к весьма слабому требованию $P_\infty u = 0$.

Простое сопоставление предложений 1 и 3 приводит к следующему результату.

Предложение 4. *Оператор J, определенный соотношением* (Д.9), *устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathscr{L}_p^\alpha$ и $\mathscr{W}_p^\alpha$, $p\alpha < m$, причем, в силу* (Д.13), *нормы в обоих пространствах эквивалентны.*

6. Установим теперь аналог предложения 4 для пространств $\mathscr{L}_{p,q}^\alpha$ и $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha$. Воспользуемся тем, что изоморфизм (Д.9) позволяет толковать интерполяционную формулу (Д.5) как соотношение между пространствами функций (а не классов функций). Тогда из (Д.5), (Д.13) и интерполяционной теоремы 2 прямо следует неравенство

$$K_p(u) \leqslant C \overset{0}{N}{}^p (u \mid B_{p,q}^\alpha R^m) = C N^p (\hat{u} \mid \mathscr{L}_{p,q}^\alpha), \quad u = J\hat{u}. \tag{Д.15}$$

Из предложения 1 и неравенства (Д.15) вытекает

Предложение 5. *Оператор J, определенный в* (Д.9), *устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathscr{L}_{p,q}^\alpha$ и $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha$, $p\alpha < m$, причем метрики в обоих пространствах эквивалентны.*

Отсюда следует, в частности, что различные метрики (Д.4) в $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha$ эквивалентны, поскольку аналогичный факт верен для пространств $\mathscr{L}_{p,q}^\alpha$.

Наконец, из предложений 4, 5 и соотношения (Д.5) непосредственно получается

Теорема. *Справедливы интерполяционные соотношения* (Д.1).

В заключение сделаем несколько замечаний. Класс $C_0^\infty \boldsymbol{R}^m$ плотен в $\mathscr{W}_p^\alpha$ и в $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha$, $q \neq \infty$. Это сразу следует из результатов работ [15, 16]. Впрочем для пространств $\mathscr{W}_p^\alpha$, $p\alpha < m$, нужный факт нетрудно установить с помощью неравенства Харди в форме (Д.12). На пространства $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha$ он переносится с помощью (Д.1).

Для пространств $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha$ справедливы более сильные неравенства, чем (Д.15). Соответствующие результаты аналогичны неравенствам Харди (Д.12) и могут быть получены из последних на основании работ [17, 20] об интерполяции в весовых классах L_p. Например, при $q=\infty$, т. е. для классов $\mathscr{H}_p^\alpha$ справедливо неравенство

$$\sup \frac{\int |u(x)|^p \varphi(|x|)\, dx}{\int |x|^{p\alpha - m} \varphi(|x|)\, dx} \leqslant C \overset{0}{N}{}^p \left(u \,|\, H_p^\alpha \boldsymbol{R}^m\right) \quad (P_\infty u = 0),$$

где верхняя грань берется по всем положительным невозрастающим функциям φ, для которых конечен интеграл в знаменателе.

Удобство наиболее слабого (из возможных) младшего члена в (Д.3), (Д.4) состоит в том, что он пригоден сразу во всей шкале пространств $\mathscr{W}_p^\alpha$, $\mathscr{B}_{p,q}^\alpha$.

Добавление 2.

Здесь мы приведем доказательство оценки (33) для s-чисел интегрального оператора $A = A_{\alpha\beta}$ с ядром (32). Этот пример интересен тем, что нужный результат не вытекает из приведенных в основном тексте теорем. Напомним, что оператор $\boldsymbol{A}$ компактен в $L_2\boldsymbol{R}^m$ только при условиях

$$\alpha+\beta>0, \quad \alpha+\beta+\gamma>m, \quad \alpha+\gamma>m/2, \quad \beta+\gamma>m/2. \qquad \text{(Д.16)}$$

Число $\gamma>0$ удобно считать фиксированным; область изменения параметров (α, β), определяемую условиями (Д.16), обозначим через S_γ. Множество точек (α, β), для которых оценка (33) справедлива, обозначим через S_γ^0. Оказывается, что $S_\gamma = S_\gamma^0$.

1. Ясно, что точки (α, β), (β, α) принадлежат S_γ^0 одновременно. Мы установим теперь, что S_γ^0 выпукло. Пусть (α_0, β_0), $(\alpha_1, \beta_1) \in S_\gamma^0$. Тогда $(\alpha, \beta) \in S_\gamma^0$, где $\alpha = (1-\varkappa)\alpha_0 + \varkappa\alpha_1$, $\beta = (1-\varkappa)\beta_0 + \varkappa\beta_1$, $0 < \varkappa < 1$. Действительно, пусть $T = A_{\alpha_0, \beta_0}$, J_1, J_2 — соответственно операторы умножения на функции $\varphi_{\beta_1 - \beta_0}$, $\varphi_{\alpha_1 - \alpha_0}$, где $\varphi_\alpha(x) = (1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$. Тогда $J_1 T J_2 = A_{\alpha_1 \beta_1}$, $J_1^\varkappa T J_2^\varkappa = A_{\alpha\beta}$, и требуемая оценка (33) для s_n $(A_{\alpha\beta})$ прямо следует из интерполяционной леммы 1.5 работы [21].

Множество $S \subset S_\gamma$ условимся называть *порождающим*, если S_γ совпадает с выпуклой оболочкой объединения S и отражения S в прямой $\alpha = \beta$. Ясно, что $S_\gamma = S_\gamma^0$, коль скоро оценка (33) установлена для какого-либо порождающего S.

Наряду с оператором $A_{\alpha\beta}$ будем рассматривать унитарно эквивалентный ему оператор

$$B_{\alpha\beta} = (I - \Delta)^{-\beta/2} G_\gamma (I - \Delta)^{-\alpha/2}.$$

Здесь G_γ — оператор умножения на функцию g_γ — преобразование Фурье функции φ_γ. При $|x| \to 0$ справедлива (см. [4]) оценка,

$$g_\gamma(x) = \begin{cases} O(|x|^{-(m-\gamma)}), & \gamma < m; \\ O(\log |x|^{-1}), & \gamma = m; \\ O(1), & \gamma > m, \end{cases} \qquad (\text{Д}.17)$$

а при $|x| \to \infty$ g_γ экспоненциально убывает.

2. Пусть $\beta = 0$; этот случай служит одним из „опорных". В силу (Д.16) при $\beta = 0$ обязательно $\gamma > m/2$, $\alpha > 0$. Числа $s_n^2(B_{\alpha 0})$ совпадают с последовательными максимумами (спектром) отношения квадратичных форм

$$N^2(g_\gamma u \mid L_2 R^m) / N^2(u \mid W_2^\alpha R^m). \qquad (\text{Д}.18)$$

Пусть сначала $2\alpha < m$. Тогда, в силу (Д.17) $g_\gamma^2 \in L_{m/2\alpha}$, и, следовательно, к спектру отношения (Д.18) применимы оценки из [7] (см. также [2], где даны пояснения относительно случая нецелых α). Эти оценки сразу приводят к (33) при $\beta=0$.

Если $2\alpha\geqslant m$, то в силу сказанного в п. 1, можно считать α целым. В этих условиях оценка (33) при $\beta=0$ прямо следует из леммы 2.1 статьи [22] на основании (Д.17).

3. Рассмотрим теперь случай, когда $2\gamma\leqslant m$ (и, следовательно, $\alpha, \beta>0$). Легко видеть, что подмножество $\widetilde{S}_\gamma$ точек $(\alpha, \beta)\in S_\gamma$, для которых либо $\alpha, \beta<m/2$, либо α, β целые и $\alpha, \beta>m/2$, в рассматриваемом случае является порождающим. Оценку (33) достаточно получить для $(\alpha, \beta)\in\widetilde{S}_\gamma$. Как и в п. 2, в доказательстве удобно заменить оператор $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$ оператором $\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}$.

Воспользуемся неравенством

$$s_{2n-1}(\boldsymbol{B}_{\alpha\beta})\leqslant s_n\left(G_\gamma^\varepsilon(I-\Delta)^{-\alpha/2}\right)s_n\left(G_\gamma^{1-\varepsilon}(I-\Delta)^{-\beta/2}\right), \tag{Д.19}$$

где $\varepsilon>0$ будет выбрано ниже. Как и в п. 2, приходим к задаче об оценке спектра отношений квадратичных форм

$$\frac{\int g_\gamma^{2\varepsilon}\,|u|^2\,dx}{N^2\left(u\,|\,W_2^\alpha\boldsymbol{R}^m\right)},\quad \frac{\int g_\gamma^{2(1-\varepsilon)}\,|u|^2\,dx}{N^2\left(u\,|\,W_2^\beta\boldsymbol{R}^m\right)}. \tag{Д.20}$$

Пусть сначала $\alpha, \beta<m/2$; выберем ε так, чтобы было $m-\gamma-\beta<\varepsilon(m-\gamma)<\alpha$. Тогда $g_\gamma^{2\varepsilon}\in L_{m/2\alpha}\boldsymbol{R}^m$, $g_\gamma^{2(1-\varepsilon)}\in L_{m/2\beta}\boldsymbol{R}^m$. На основании [2, 7] заключаем, что собственные числа отношений (Д.20) имеют порядок соответственно $O(n^{-2\alpha/m})$, $O(n^{-2\beta/m})$. Отсюда и из (Д.19) следует (33).

Если α, β целые и $\alpha, \beta>m/2$, то выберем ε так, чтобы было $m-2\gamma<2(m-\gamma)\varepsilon<m$. Тогда функции $g_\gamma^{2\varepsilon}$, $g_\gamma^{2(1-\varepsilon)}$ суммируемы и экспоненциально убывают; как и в п. 2 (случай $2\alpha\geqslant m$), оценка (33) получается ссылкой на лемму 2.1 из [22].

4. Результаты п. 1—3 позволяют при любом $\gamma>0$ исчерпать область $\alpha, \beta\geqslant0$. При $2\gamma>m$ допустимы значения $\beta<0$. Покажем, что тогда возможна редукция к случаю $-1<\beta\leqslant0$. Действительно, числа $s_n^2(\boldsymbol{B}_{\alpha\beta})$ совпадают со спектром отношения квадратичных форм

$$\frac{N^2\left(g_\gamma u\,|\,W_2^{|\beta|}\boldsymbol{R}^m\right)}{N^2\left(u\,|\,W_2^\alpha\boldsymbol{R}^m\right)}. \tag{Д.21}$$

Условия (Д.16) теперь означают, что

$$\alpha>|\beta|,\ \gamma-|\beta|>m/2,\quad \alpha+\gamma-|\beta|>m. \qquad (\text{Д}.22)$$

Числитель отношения (Д.21) можно оценить сверху суммой членов вида

$$N^2(\mathscr{D}^\sigma g_\gamma \mathscr{D}^\tau u \mid W_2^\mu \boldsymbol{R}^m),\ |\sigma|+|\tau|=\delta,$$

где δ — целая часть $|\beta|$, $\mu=|\beta|-\delta$; σ, τ — мультииндексы. Функция $g_{\gamma,\sigma}=\mathscr{D}^\sigma g_\gamma$ удовлетворяет условиям вида (Д.17) с заменой γ на $\gamma-|\sigma|$. Полагая $\mathscr{D}^\tau u=v$, можно для каждого члена свести дело к исследованию спектра отношения

$$\frac{N^2\left(g_{\gamma,\sigma}v \mid W_2^\mu \boldsymbol{R}^m\right)}{N^2\left(v \mid W_2^{\alpha-|\tau|}\boldsymbol{R}^m\right)}. \qquad (\text{Д}.23)$$

Мы пришли к серии задач вида (Д. 21) с заменой $|\beta|$ на μ, α — на $\alpha-|\tau|$, γ — на $\gamma-|\sigma|$. Условие (Д. 22) при этом сохраняется, и дело свелось к случаю $-1<\beta\leqslant 0$. Коль скоро оценка (33) для таких β будет получена, она может быть перенесена на любые допустимые $\beta<0$. При этом „наихудший“ порядок, который и определяет скорость убывания чисел $s_n(\boldsymbol{B}_{\alpha\beta})$, соответствует значению $\sigma=0$.

Заметим, что при β целом будет $\mu=0$, и спектр каждого из отношений (Д. 23) оценивается как и в п. 2. Очевидно, это сразу приводит к оценке (33) для целых $\beta<0$.

5. Пусть $-1<\beta<0$. Если при этом $\gamma-m/2>1$, то оценка (33) получается интерполяцией между подходящими точками на прямых $\beta=0$, $\beta=-1$. Остается рассмотреть случай $0<\gamma-m/2\leqslant 1$, когда значение $\beta=-1$ недопустимо. Запишем ядро (32) в виде

$$\varphi_{\alpha-|\beta|}(x)\,\varphi_\gamma(x-y)+\varphi_\alpha(x)\,\varphi_{\gamma-|\beta|}(x-y)\left[\frac{\varphi_\beta(y)-\varphi_\beta(x)}{\varphi_\beta(x-y)}\right]. \qquad (\text{Д}.24)$$

Предположим, что

$$\alpha-|\beta|\leqslant m/2,\ \alpha>m/2. \qquad (\text{Д}.\ 25)$$

Тогда второе слагаемое в (Д.24) есть ядро оператора класса $\mathfrak{S}_2$ (поясним, что множитель в квадратичных скобках ограничен при $-1 \leqslant \beta < 0$), а потому его s-числа имеют оценку $s_n = o(n^{-1/2})$. Первое слагаемое в (Д. 24) есть ядро оператора, рассмотренного в п. 2, и его s-числа удовлетворяют оценке (33). В силу первого из условий (Д.25) этим определяется порядок убывания s-чисел оператора $A_{\alpha\beta}$ с ядром (Д.24). Таким образом, оценка (33) установлена при дополнительных условиях (Д.25). Остается заметить, что в рассматриваемом случае условия (Д.25) выделяют в S_γ множество, которое вместе с лучом $\beta=0$, $\alpha > m/2$ порождает все S_γ.

В заключение отметим, что при $\gamma > m$ можно предложить более короткое доказательство оценки (33). Оно основано на том, что при $\alpha+\beta=0$, α, $\beta > (m/2)-\gamma$ оператор $A_{\alpha\beta}$ ограничен, и указанный отрезок вместе с лучом $\beta=0$, $\alpha > 0$ порождает S_γ. К сожалению, этот способ не распространяется на $\gamma \in (m/2, m]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бирман М. Ш., Соломяк М. З.** Кусочно полиномиальные приближения функций классов W_p.— «Мат. сб.», 1967, т. 73 (115), № 3, с. 331—335.
2. **Бирман М. Ш., Соломяк М. З.** Количественный анализ в теоремах вложения и приложения к спектральной теории.— В кн.: Десятая математическая школа. Киев, 1974, с. 5—189.
3. **Ротфельд С. Ю.** О сингулярных числах суммы вполне непрерывных операторов.— «Проблемы матем. физики», 1968, т. 3, с. 81—87.
4. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., «Наука», 1969. 480 с.
5. **Караджов Г. Е.** О продолжении функций пространств Бесова $B^\alpha_N L^p$.— «Докл. Болг. АН», 1974, т. 27, № 5, с. 603—606.
6. **Бирман М. Ш., Соломяк М. З.** О главном члене спектральной асимптотики для «негладких» эллиптических задач.— «Функциональный анализ и его приложения», 1970, т. 4, № 4, с. 1—13.
7. **Розенблюм Г. В.** Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 5, с. 1012—1015.
8. **Lions J.-L., Peetre J.** Sur une classe d'espaces d'interpolation.— „Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.“, 1964, v. 19, p. 5—68.
9. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., «Мир», 1975. 333 с.
10. **Holmstedt T.** Interpolation of quasi-normed spaces.—„Math. scand.“, 1970, v. 26, p. 177—199.
11. **Караджов Г. Е.** Об интерполяционном методе средних для квазинормированных пространств.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 209, № 1, с. 33—36.
12. **Бирман М. Ш., Соломяк М. З.** Замечания о ядерности интегральных операторов и об ограниченности псевдодифференциальных

операторов.— «Изв. вузов. Математика», 1969, т. 9, с. 11—17.
13. **Костометов Г. П.** Асимптотическое поведение спектра интегральных операторов с особенностью на диагонали.— «Мат. сб.», 1974, т. 94, № 3, с. 444—451.
14. **Peetre J.** Sur les espaces de Besov.—„C. r. Acad. Sci. Paris", 1967, v. 264, p. 281—283.
15. **Соболев С. Л.** Плотность финитных функций в пространстве $L_p^{(m)}(E_n)$. —«Сиб. мат. журн.», 1963, т. 4, № 3, с. 673—682.
16. **Бесов О. В.** Продолжение функций из L_p^l и W_p^l. О плотности финитных функций в $\mathscr{L}_{p,\theta}^l$ и распространение функций.— В кн.: Труды МИАН. М., 1967, т. 89, с. 5—70.
17. **Peetre J.** On interpolation of L_p-spaces with weight functions.— „Acta Sci. Math. Szeged", 1967, v. 28, N 1—2, p. 61—69.
18. **Яковлев Г. Н.** Граничные свойства функций класса $W_p^{(l)}$ на областях с угловыми точками.— «Докл. АН СССР», 1961, т. 140, № 1, с. 73—76.
19. **Солонников В. А.** Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа.— В кн.: Труды МИАН. М., 1964, т. 70, с. 133—212.
20. **Gilbert J.** Interpolation between weighted L^p-spaces.—„Arkiv math.", 1972, v. 10, N 2, p. 235—249.
21. **Бирман М. Ш., Соломяк М. З.** Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов. II.— В кн.: Труды ММО. М., МГУ, т. 28, 1973, с. 3—34.
22. **Бирман М. Ш., Борзов В. В.** Об асимптотике дискретного спектра некоторых сингулярных дифференциальных операторов.— В кн.: Проблемы математической физики. Т. 5. Л., ЛГУ, 1971, с. 24—38.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОПЕРАТОРОВ НА ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЭТИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

А. В. Бухвалов, *Г. Я. Лозановский*

§ 1. Основные свойства идеальных пространств

1. Многие важные пространства, рассматриваемые в анализе, являются идеальными пространствами (пространства L^p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича, со смешанной нормой). Теория таких пространств является ветвью общей теории векторных (банаховых) решеток, основы которой были построены в тридцатых годах Л. В. Канторовичем. Многие результаты, которые в настоящем обзоре будут приведены только для случая идеальных пространств, справедливы на самом деле для существенно более широких классов банаховых решеток. Мы сознательно жертвуем здесь общностью формулировок, так как хотим свести к минимуму использование терминологии абстрактной теории векторных решеток. По этой же причине мы ограничиваемся случаем σ-конечной меры.

Всюду далее (T, Σ, μ) (возможно, с индексами) есть пространство с неотрицательной счетно-аддитивной σ-конечной полной мерой, $S=S(\mu)$ — пространство всех конечных вещественных измеримых функций на нем (эквивалентные по мере μ функции и множества отождествляются). Для $E\in\Sigma$ через χ_E обозначается характеристическая функция E. Для $x\in S$ полагаем $\operatorname{supp} x=\{t\in T: x(t)\neq 0\}$. Для любого $A\subset S$ $\operatorname{supp} A$ означает наименьшее $E\in\Sigma$, содержащее $\operatorname{supp} x$ для каждого $x\in A$. Пусть $x, y\in S$. Запись $x\geqslant y$ означает, что $x(t)\geqslant y(t)$ для почти всех $t\in T$. Символы $x\vee y$, $x\wedge y$ определяются формулами

$$(x\vee y)(t)=\max\{x(t), y(t)\},$$
$$(x\wedge y)(t)=\min\{x(t), y(t)\},\ t\in T.$$

Напомним, что S есть *полная векторная решетка* (*K-пространство*), т. е. каждое порядково ограниченное $A\subset S$ имеет супремум ($\sup A$) и инфимум ($\inf A$). Элементы $x, y \in S$ называются дизъюнктными (обозначение xdy), если $|x| \wedge |y| = 0$. Под (μ)-топологией на S понимается топология сходимости по мере μ, которая может быть задана с помощью метрики $\rho(x, y) = \int \frac{|x-y|}{1+|x-y|} u d\mu$, $x, y \in S$; здесь u — любая функция такая, что $u \geqslant 0$, $u \in L^1(\mu)$, $\operatorname{supp} u = T$. Запись $x_n \xrightarrow{(\mu)} x$ $(x_n, x \in S)$ означает, что последовательность $x_n \to x$ в (μ)-топологии. Запись $x_n \downarrow$ означает, что $x_n \geqslant x_m$ при $n \leqslant m$. Запись $x_n \downarrow x$ означает, что $x_n(t) \downarrow x(t)$ п. в. Подобным же образом определяется $x_n \uparrow$ и $x_n \uparrow x$.

Идеальным пространством (ИП) на (T, Σ, μ) называется векторное подпространство X в S такое, что $(x \in X, y \in S, |y| \leqslant |x| \Rightarrow y \in X)$.

Норма $\|\cdot\|$ на ИП X называется *монотонной*, если $(x, y \in X, |x| \leqslant |y| \Rightarrow (\|x\| \leqslant \|y\|))$.

Нормированным (*банаховым*) *идеальным пространством* на (T, Σ, μ) (соответственно НИП и БИП) называется ИП на (T, Σ, μ), снабженное монотонной (монотонной банаховой) нормой.

Таким образом, ИП является порядково полной векторной решеткой (K-пространством), НИП (соответственно БИП) является порядково полной нормированной (соответственно банаховой) решеткой. Отметим, что любые две монотонные банаховы нормы на одном и том же ИП эквивалентны.

2. Теорема 1.2.1. *Пусть X есть* БИП *на* (T, Σ, μ), *причем* $\operatorname{supp} X = T$. *Если* $\mu T < \infty$, *то существует* $u \in S_+$ *такое, что*

$$L^\infty(\mu) \subset \{xu : x \in X\} \subset L^1(\mu).$$

Эта теорема показывает, что если $\mu(T) < \infty$, то БИП на (T, Σ, μ) всегда можно считать „зажатым" между $L^\infty(\mu)$ и $L^1(\mu)$.

3. Пусть X есть ИП на (T, Σ, μ). Аддитивный и однородный функционал f на X называется *порядково ограниченным* (или *регулярным*), если он ограничен на каждом порядковом интервале из X, т. е. на каждом множестве вида $\{z \in X : x \leqslant z \leqslant y\}$, где $x, y \in X$, $x \leqslant y$. Пространство $X^\sim$ всех порядково ограниченных функционалов на X при естественном упорядочении есть K-пространство, т. е. полная векторная решетка.

Функционал $f \in X^{\sim}$ называется *порядково непрерывным* (или *вполне линейным*), если $(x_n \in X,\ x_n \downarrow 0) \Rightarrow (f(x_n) \to 0)$.

Функционал $f \in X^{\sim}$ называется *сингулярным* (или *анормальным*), если $\operatorname{supp}\{x \in X : |f|(|x|) = 0\} = \operatorname{supp} X$.

Совокупность $X_n^{\sim}$ всех порядково непрерывных и совокупность $X_s^{\sim}$ всех сингулярных функционалов на X суть дополнительные друг к другу полосы (компоненты) в K-пространстве $X^{\sim}$. Тем самым каждый $f \in X^{\sim}$ однозначно представим в виде $f = f_n + f_s$, где $f_n \in X_n^{\sim}$, $f_s \in X_s^{\sim}$.

Если X есть НИП, то $X^* \subset X^{\sim}$; если X есть БИП, то $X^* = X^{\sim}$. Здесь X^* — банахово сопряженное к X; X^* есть порядково полная банахова решетка. Пусть по-прежнему X есть ИП на (T, Σ, μ).

Теорема 1.3.1. *а) Каждая полоса в $X^{\sim}$ секвенциально замкнута в слабой топологии $\sigma(X^{\sim}, X)$;*

б) если $X^{\sim}$ разделяет точки из X, то топология Макки $\tau(X, X^{\sim})$ может быть задана набором монотонных полунорм.

в) если $X_n^{\sim}$ разделяет точки из X, то каждый порядковый интервал в X компактен в топологии $\sigma(X, X_n^{\sim})$, а топология Макки $\tau(X, X_n^{\sim})$ может быть задана набором монотонных полунорм.

4. Пусть по-прежнему X есть ИП на (T, Σ, μ). Дуальное ИП к X определяется формулой

$$X' = \{x' \in S : \operatorname{supp} x' \subset \operatorname{supp} X,\ xx' \in L^1(\mu)\ \ \forall x \in X\}.$$

По каждому $x' \in X'$ можно построить $f_{x'} \in X_n^{\sim}$ по формуле

$$f_{x'}(x) = \int_T xx'\,d\mu,\ x \in X.$$

Теорема 1.4.1. *Отображение $x' \to f_{x'}$ есть векторно-решеточный изоморфизм X' на $X_n^{\sim}$.*

Пусть теперь $\operatorname{supp} X' = \operatorname{supp} X$. Тогда $X \subset X''$, $X''' = X'$. Если $X'' = X$, то X называется *(o)-рефлексивным* (или *рефлексивным по Накано*).

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть НИП на (T, Σ, μ). Норма Лоренца $\|\cdot\|_L$ на X определяется формулой

$$\|x\|_L = \inf\{\lim_{n\to\infty} \|x_n\| : \{x_n\} \subset X,\ 0 \leqslant x_n \uparrow |x|\},\ x \in X.$$

$\|\cdot\|_L$ есть монотонная норма на X.

Положим $X^\times = \{x' \in X' : f_{x'} \in X^*\}$. Для $x' \in X^\times$ полагаем $\|x'\|^\times = \sup\{|f_{x'}(x)| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\}$. $\|\cdot\|^\times$ есть монотонная норма на $X^\times$.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ *есть* НИП *на* (T, Σ, μ). *Тогда* $\operatorname{supp} X' = \operatorname{supp} X^\times = \operatorname{supp} X$ (*тем самым* $X^* \cap X_n^\sim$ *разделяет точки из* X). *Кроме того,* $\|x\|_L = \|x\|^\times$ *для любого* $x \in X$.

Если $(X, \|\cdot\|)$ есть БИП, то $X^\times = X'$; в этом случае вместо $\|\cdot\|^\times$ будем писать $\|\cdot\|'$ и называть норму $\|\cdot\|'$ дуальной к норме $\|\cdot\|$.

Теорема 1.4.3. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ *есть* БИП *на* (T, Σ, μ), *причем* $\operatorname{supp} X = T$. *Тогда* а) *для любых* $x \in X$, $x' \in X'$ *справедливо* $\int_T |xx'|\, d\mu \leqslant \|x\| \cdot \|x'\|'$; б) *для любого* $h \in L^1(\mu)$ *справедливо*

$$\inf\{\|x\| \cdot \|x'\|' : x \in X,\ x' \in X',\ xx' = h\} = \int_T |h|\, d\mu.$$

5. Теорема 1.5.1. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ — НИП *на* (T, Σ, μ), *причем полнота по норме не предполагается.*

а) *Если* $x_n \in X$, $\|x_n\| \to 0$, *то* $x_n \xrightarrow{(\mu)} 0$. *Тем самым оператор вложения* X *в* S *непрерывен.*

б) *Если* $\{x_n\} \in X$ *есть последовательность Коши, то она* (μ)-*сходится к некоторому* $x \in S$.

Теорема 1.5.2. *Для любого* НИП $(X, \|\cdot\|)$ *на* (T, Σ, μ) *следующие утверждения эквивалентны*:

(а) $(X, \|\cdot\|)$ *полно по норме*;

(б) *если* $x_n \in X_+$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$;

(в) *если* $x_n \in X_+$, $x_n d x_m$ *при* $n \neq m$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$.

6. В теории нормированных решеток важную роль играют свойства (o)-непрерывности, (o)-полунепрерывности и монотонной полноты нормы. Мы приведем эти свойства применительно к НИП, но в случае произвольных нормированных решеток они определяются аналогично.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть НИП на (T, Σ, μ). Говорят, что элемент $x \in X$ имеет (o)-*непрерывную* (или *абсолютно не-*

прерывную) норму, если $(|x| \geqslant x_n \downarrow 0) \Rightarrow (\|x_n\| \to 0)$. Если $\mu(T) < \infty$, то $x \in X$ имеет (o)-непрерывную норму тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $(E \in \Sigma, \mu E < \delta) \Rightarrow (\|x\chi_E\| < \varepsilon)$.

Множество $X_{(A)}$ всех $x \in X$ с (o)-непрерывной нормой есть НИП; $X_{(A)}$ замкнуто в $(X, \|\cdot\|)$.

Говорят, что в $(X, \|\cdot\|)$ *выполнено условие* (A) (*условие* (o)-*непрерывности нормы*), если $X = X_{(A)}$, т. е. если каждый $x \in X$ имеет (o)-непрерывную норму.

Теорема 1.6.1. *Для любого* БИП $(X, \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны*:

(1) в $(X, \|\cdot\|)$ *выполнено условие* (A);

(2) *если* $x_n \downarrow 0$ *в* X *и* $(x_n - x_{n+1}) d x_{n+1}$ *для* $\forall n$, *то* $\|x_n\| \to 0$;

(3) $X^* = X_n^{\sim}$;

(4) *каждый порядковый интервал в* X *слабо компактен*;

(5) *в* X *выполнено условие (u) Пелчинского: для каждой слабо фундаментальной последовательности* $x_n \in X$ *существует такая последовательность* $y_n \in X$, *что* $\sum_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < \infty$ *для* $\forall f \in X^*$ *и последовательность* $x_n - \sum_{i=1}^{n} y_i$ *слабо сходится к нулю*;

(6) *в* X *не существует подпространства изоморфного* l^∞;

(7) *для* $\forall x \in X$ $\exists x' \in X'$ *такой, что* $\|x'\|' = 1$ *и* $\|x\| = \int_T x x' d\mu$;

(8) $\operatorname{supp} X_{(A)} = \operatorname{supp} X$ *и существует проектор из* X *на* $X_{(A)}$;

(9) *при естественном сложении* X *в* X^{**} БИП X *оказывается идеалом в* X^{**};

Если мера μ *сепарабельна, то каждое из условий* (1)—(9) *эквивалентно условию*

(10) X — *сепарабельно.*

Теорема 1.6.2. *Для любого* БИП $(X, \|\cdot\|)$ *справедливо* $(X'')_{(A)} = X_{(A)}$ *и* $\|x\|'' = \|x\|$ *для* $\forall x \in X_{(A)}$.

7. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ есть НИП на (T, Σ, μ). Говорят, что элемент $x \in X$ имеет (o)-полунепрерывную норму, если $(0 \leqslant x_n \uparrow |x|) \Rightarrow (\|x_n\| \to \|x\|)$, т. е. если $\|x\|_L = \|x\|$, где $\|\cdot\|_L$ — норма Лоренца. Если $\mu(T) < \infty$, то $x \in X$ имеет (o)-полунепрерывную норму тогда и только тогда, когда

для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$(E\in\Sigma,\ \mu(T\setminus E)<\delta)\Rightarrow(\|x\chi_E\|>\|x\|-\varepsilon).$$

Говорят, что в $(X,\ \|\cdot\|)$ выполнено *условие* (C) (*условие* (o)-*полунепрерывности нормы*), если каждый $x\in X$ имеет (o)-полунепрерывную норму. Ясно, что $(A)\Rightarrow(C)$.

Теорема 1.7.1. *Если в* $(X,\ \|\cdot\|)$ *выполнено* (C), *то каждая порядково ограниченная последовательность Коши в* X *сходится.*

Теорема 1.7.2. *Для любого* НИП $(X,\ \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в* $(X,\ \|\cdot\|)$ *выполнено условие* (C);

(2) *если* $x_n\in X$, $\|x_n\|\leqslant 1$ *для* $\forall n$, $x_n\xrightarrow{\mu}x\in X$, *то* $\|x\|\leqslant 1$;

(3) $\|x\|=\|x\|^{\times\times}$ *для* $\forall x\in X$;

(4) *для любых* $x\in X_+$ *и* $\varepsilon>0$ *найдутся* $y\in X_+$, $y^\times\in X_+^\times$ *такие, что* $(1-\varepsilon)x\leqslant y\leqslant(1+\varepsilon)x$, $\|y^\times\|^\times=1, \|y\|=\int\limits_T yy^\times d\mu$.

8. Говорят, что в НИП $(X,\ \|\cdot\|)$ выполнено условие (B) (условие монотонной полноты нормы), если $(0\leqslant x_n\uparrow,$ $\sup\|x_n\|<\infty)\Rightarrow(\sup x_n\in X)$.

Теорема 1.8.1. *Пусть в* НИП $(X,\ \|\cdot\|)$ *выполнено условие* (B). *Тогда* а) $(X,\ \|\cdot\|)$ *полно по норме*; б) $X=X''$ *и* $\|\cdot\|$ *эквивалентна* $\|\cdot\|''$.

Теорема 1.8.2. *Для любого* НИП $(X,\ \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в* $(X,\ \|\cdot\|)$ *выполнено* (B);

(2) *если* $0\geqslant x_n\uparrow$, $x_n\in X$, $(x_{n+1}-x_n)dx_n$ *для всех* n, $\sup\|x_n\|<\infty$, *то* $\sup x_n\in X$.

(3) *существует константа* $c>0$ *такая, что если* $x_n\in X$, $\|x_n\|\leqslant 1$ *для всех* n, $x_n\xrightarrow{(\mu)}x\in S$, *то* $x\in X$ *и* $\|x\|\leqslant c$;

(4) $X=X^{\times\times}$ *по запасу элементов.*

9. Особый интерес представляет конъюнкция свойств (B) и (C).

Теорема 1.9.1. *Для любого* НИП $(X,\ \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в* $(X,\ \|\cdot\|)$ *выполнены условия* (B) *и* (C);

(2) *единичный шар* $\{x\in X:\|x\|\leqslant 1\}$ (μ)-*замкнут в* S;

(3) $X=X^{\times\times}$ *и* $\|\cdot\|=\|\cdot\|^{\times\times}$;

(4) *любая центрированная система замкнутых шаров в* X *имеет непустое пересечение*;

(5) *X — банахово и существует проектор единичной нормы из X^{**} на X (при естественном вложении X в X^{**}).*

Теорема 1.9.2 дополняет теорему 1.4.3.

Теорема 1.9.2. *Пусть в* БИП $(X, \|\cdot\|)$ *выполнены условия* (B) *и* (C) *и* $\operatorname{supp} X = T$. *Тогда для* $\forall h \in L^1(\mu)$ $\exists x \in X$, $\exists x' \in X'$ *такие, что* $h = xx'$ *и* $\|x\| \cdot \|x'\|' = \int\limits_T |h| \, d\mu$.

Теорема 1.9.3. *Для любого* НИП $(X, \|\cdot\|)$ *в* $(X^*, \|\cdot\|^*)$ *и* $(X^\times, \|\cdot\|^\times)$ *выполнены условия* (B) *и* (C).

10. *KB-пространством* (или *пространством Канторовича — Банаха*) называется НИП, в котором выполнены условия (A) и (B). *KB*-пространство всегда полно по норме.

Теорема 1.10.1. *Для любого* БИП $(X, \|\cdot\|)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *X есть KB-пространство;*

(2) *X слабо секвенциально полно;*

(3) *при естественном вложении X в X^{**}* БИП *X оказывается полосой (компонентой) в X^{**};*

(4) *в X нет подпространств, изоморфных пространству (c_0).*

11. Теорема 1.11.1. *Для любого* БИП *X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *X рефлексивно;*

(2) *X есть KB-пространство и X^* есть KB-пространство;*

(3) *X есть KB-пространство и в X' выполнено условие (A);*

(4) *X' рефлексивно;*

(5) *в X не существует подпространства, изоморфного c_0, и не существует подпространства, изоморфного l^1.*

12. Остановимся кратко на одном важном классе БИП — симметричных пространствах, теория которых в настоящее время очень интенсивно развивается, особенно в связи с задачами интерполяции операторов. Для простоты ограничимся случаем пространств на отрезке $[0, 1]$.

Итак, пусть (T, Σ, μ) есть отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега. БИП X на $[0, 1]$ называется *симметричным*, если $(x \in X, y \in S, x$ и y равноизмеримы$) \Rightarrow (y \in X$ и $\|x\| = \|y\|)$. Для любого симметричного X справедливо $L^\infty \subset X \subset L^1$.

Теорема 1.12.1. *Пусть X — симметричное пространство на $[0, 1]$. Дуальное пространство X' также симметрично. Если $X \neq L^\infty$, то $X_{(A)}$ совпадает с замыканием*

L^∞ в X. Если $X \neq X_{(A)}$, то не существует проектора из X на X_A и $X_{(A)}$ не изоморфно сопряженному банахову пространству.

Многие свойства симметричного пространства X зависят от его фундаментальной функции φ, где

$$\varphi(t) = \|\chi_{[0,\, t]}\|, \ t \in [0, 1].$$

К числу симметричных пространств относятся классические пространства L^p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича.

Приведем определения пространств Лоренца и Марцинкевича, которые в классе симметричных пространств играют важную „экстремальную" роль. Для $x \in S[0, 1]$ через x^* обозначается невозрастающая перестановка функции $|x|$.

Пусть ψ есть неубывающая, непрерывная, вогнутая на $[0, 1]$ функция такая, что $\psi(0) = 0$, $\psi(t) > 0$ при $t \geqslant 0$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{\psi(t)} = 0.$$

Пространство $M(\psi)$ состоит из всех $x \in S[0, 1]$ таких, что

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0 < h \leqslant 1} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(t)\, dt < \infty.$$

Пространство $\Lambda(\psi)$ состоит из всех $x \in S[0, 1]$ таких, что

$$\|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^* d\psi < \infty.$$

Эти пространства и их нормы дуальны друг к другу.

13. Остановимся более подробно на строении пространства $X_s^\sim$, где X есть ИП на (T, Σ, μ).

Для $f \in X^\sim$, $E \in \Sigma$ определим функционал $f_E \in X^\sim$ формулой

$$f_E(x) = f(x \cdot \chi_E), \ x \in X.$$

Функционал $f \in X_s^\sim$ называется *локализованным*, если для всякого $F \in \Sigma$ с $\mu(F) > 0$ найдется $E \in \Sigma$ такое, что $E \subset F$, $\mu(E) > 0$ и $f_E = 0$. Совокупность всех локализованных функционалов на X обозначим через $X_{\mathrm{loc}}^\sim$. $X_{\mathrm{loc}}^\sim$ есть идеал в $X_s^\sim$. Как отмечено в п. 3, $X^\sim = X_n^\sim \oplus X_s^\sim$. В приложениях бывает важно иметь равенство $X^\sim = X_n^\sim \oplus$

$\oplus X_{loc}$, т. е. $X_s^\sim = X_{loc}^\sim$. В случае L^∞, очевидно, имеем $(L^\infty)_{loc}^\sim = (L^\infty)_s^\sim$, и мы получаем часто используемую теорему Иосиды — Хьюита.

Теорема 1.13.1. $(L^\infty)^* = L^1 \oplus (L^\infty)_{loc}^\sim$.

Выясним, когда еще $X_s^\sim = X_{loc}^\sim$.

Теорема 1.13.2. *Пусть X есть* ИП, $f \in X_s^\sim$. *Пусть существует $u \in X_+$ такое, что* $|f|(x) = \lim\limits_{n\to\infty} |f|(x \wedge nu)$ *для всех $x \in X_+$. Тогда* $f \in X_{loc}^\sim$.

Теорема 1.13.3. *Пусть X есть* БИП, *причем X квазиравномерно выпукло (это значит, что существует число $r>0$ такое, что $\|x_1+x_2\| < 2-r$ для любых x_1, $x_2 \in X_+$ с $\|x_1\| \leqslant 1$, $\|x_2\| \leqslant 1$, $x_1 d x_2$). Тогда X^* есть КВ-пространство и* $X_s^\sim = X_{loc}^\sim$.

Остановимся на двух конкретных пространствах.

Теорема 1.13.4. *Если X есть произвольное пространство Орлича на* $[0, 1]$, *то* $X_s^\sim = X_{loc}^\sim$.

Теорема 1.13.5. *Пусть $M(\psi)$ есть пространство Марцинкевича. Тогда*

а) *если* $\varliminf\limits_{t\to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$, *то* $M(\psi)_s^\sim = M(\psi)_{loc}^\sim$;

б) *если* $\varliminf\limits_{t\to 0} \dfrac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, *то* $M(\psi)_s^\sim \neq M(\psi)_{loc}^\sim$;

более того, в этом случае существует $f \in M(\psi)_s^\sim$, $f \geqslant 0$ *такой, что* $\|f_E\| = 1$ *для всех* $E \in \Sigma$ *с* $\mu(E) > 0$.

14. В этом пункте будут сформулированы результаты о замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций, которые находят приложения, например, в выпуклом анализе. Их доказательства опираются на теорему 1.13.1 и некоторые факты из теории векторных решеток. Мы для простоты ограничимся случаем пространства $L^1(\mu)$, хотя большая часть изложенного материала допускает обобщение на широкие классы векторных решеток.

Пусть $\pi: L^1(\mu) \to L^1(\mu)^{**}$ — оператор естественного вложения. Тогда $\pi(L^1(\mu))$ есть полоса в $L^1(\mu)^{**}$. Обозначим через $\mathscr{P}$ оператор проектирования $(L^1(\mu))^{**}$ на $\pi(L^1(\mu))$ ($\mathscr{P}$ есть проектор в смысле теории векторных решеток).

Теорема 1.14.1. *Пусть V — непустое выпуклое множество в $L^1(\mu)$, W — замыкание множества $\pi(V)$ в $L^1(\mu)^{**}$ в топологии $\sigma(L^1(\mu)^{**}, L^1(\mu)^*)$. Тогда* а) *если* V (μ)-*замкнуто в* $L^1(\mu)$, *то* $\mathcal{P}(W)=\pi(V)$;

б) *если* V *ограничено по норме в* $L^1(\mu)$ *и* $\mathcal{P}(W)=\pi(V)$, *то* V (μ)-*замкнуто в* $L^1(\mu)$.

Следствие 1.14.2. *Пусть* Z *есть ИП на* (T, Σ, μ) *такое, что* $\operatorname{supp} Z=T$ *и* $Z\subset L^\infty(\mu)$ (*в частности, можно взять* $Z=L^\infty(\mu)$). *Пусть* V_1 *и* V_2 — *непустые, выпуклые, непересекающиеся множества в* $L^1(\mu)$, (μ)-*замкнутые в* $L^1(\mu)$. *Если одно из них ограничено по норме в* $L^1(\mu)$, *то существует* $z\in Z$ *такое, что*

$$\sup\left\{\int\limits_T xz d\mu : x\in V_1\right\}<\inf\left\{\int\limits_T xz d\mu : x\in V_2\right\}.$$

Следствие 1.14.3. *Пусть* $\{V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — *центрированная система выпуклых, ограниченных по норме,* (μ)-*замкнутых подмножеств в* $L^1(\mu)$. *Тогда* $\bigcap\limits_{\xi\in\Xi} V_\xi\neq\varnothing$.

Следствие 1.14.4. *Пусть* $\{V_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — *центрированная система выпуклых,* (μ)-*ограниченных,* (μ)-*замкнутых подмножеств в* $S(\mu)$, *причем* $V_\xi\subset S(\mu)_+$ *для всех* ξ. *Тогда* $\bigcap\limits_{\xi\in\Xi} V_\xi\neq\varnothing$.

Следствие 1.14.5. *Пусть* V_1, V_2 — *выпуклые, ограниченные по норме,* (μ)-*замкнутые подмножества в* $L^1(\mu)$. *Тогда*

а) *множества* V_1+V_2 *и* $\operatorname{conv}(V_1\cup V_2)$ (μ)-*замкнуты*;

б) *существуют* $x_1\in V_1$, $x_2\in V_2$ *такие, что*

$$\|x_1-x_2\|=\inf\{\|y_1-y_2\| : y_1\in V_1,\ y_2\in V_2\}.$$

Следствие 1.14.6. *Пусть* V — *непустое, выпуклое, ограниченное по норме,* (μ)-*замкнутое подмножество в* $L^1(\mu)$ *и пусть* $E\in\Sigma$. *Тогда множество* $\{x\chi_E : x\in V\}$ (μ)-*замкнуто в* $L^1(\mu)$.

15. С тех пор как в 1972 г. П. Энфло построил пример сепарабельного рефлексивного банахова пространства без свойства аппроксимации, появился ряд работ, посвященных уточнению и усовершенствованию его конструкции. Однако все построенные пространства типа Энфло не удавалось превратить в БИП. Лишь совсем недавно А. Шанковскому удалось построить пример БИП без свойства аппроксимации, но БИП в этом примере не являлось рефлексивным банаховым пространством. Опираясь на существование БИП, построенного А. Шанковским, первому автору удалось построить пример сепарабельного рефлек-

сивного БИП без свойства аппроксимации, а следовательно, и без базиса. При этом используются следующие результаты, интересные и сами по себе.

Теорема 1.15.1. *Пусть* X — БИП *с условием* (A), *E — банахово пространство, $U:E\to X$ — компактный оператор. Тогда существует рефлексивное* БИП $Y\subset X$ *такое, что $U(E)\subset Y$ и оператор $U:E\to Y$ является компактным.*

Теорема 1.15.2. *Если* X — БИП *с условием* (A), *в котором не выполнено свойство аппроксимации, то существует рефлексивное* БИП $Y\subset X$ *без свойства аппроксимации.*

§ 2. Представление сопряженного пространства к БИП

1. В этом параграфе (T, Σ, μ) — по-прежнему пространство с неотрицательной счетно-аддитивной σ-конечной полной мерой (заметим, впрочем, что условие σ-конечности можно заменить существенно более слабым условием).

Мы будем заниматься задачей представления пространства $X^{\sim}$ для произвольного ИП на (T, Σ, μ); напомним, что если X есть БИП, то $X^*=X^{\sim}$. Таким образом, мы рассматриваем задачу несколько более общую, чем задача представления сопряженного пространства к БИП.

Напомним также, что $X_n^{\sim}$ допускает удобное представление в виде дуального пространства (см. § 1.4).

Через M в этом параграфе будем обозначать пространство всех ограниченных конечно-аддитивных мер ν на Σ таких, что $(E\in\Sigma,\ \mu(E)=0)\Rightarrow(|\nu|(E)=0)$; за $\|\nu\|$ принимаем полную вариацию ν. M есть банахова решетка, являющаяся (L)-пространством в смысле Какутани (ибо $\|\nu_1\|+\|\nu_2\|=\|\nu_1+\nu_2\|$ при $\nu_1, \nu_2\in M_+$).

Напомним, что $(L^\infty(\mu))^*$ векторно-решеточно изоморфно и изометрично M; при этом $f\in(L^\infty(\mu))^*$ соответствует $\nu\in M$, задаваемая формулой

$$\nu(E)=f(\chi_E),\ E\in\Sigma.$$

2. Пусть X — произвольное ИП на (T, Σ, μ). *Представлением* пространства $X^{\sim}$ будем называть всякий аддитивный и однородный оператор $A:X^{\sim}\to M$, удовлетворяющий условиям:

а) A взаимнооднозначен;

б) A положителен, т. е. $Af \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$.
Множество всех представлений пространства $X^\sim$ обозначим через $\mathcal{R}(X)$.

Теорема 2.2.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество* $\mathcal{R}(X)$ *непусто;*

(2) *существует* $A \in \mathcal{R}(X)$ *такой, что* $\mathcal{A}(f \vee g) = Af \vee Ag$ *для всех* $f, g \in X^\sim$;

(3) *существует* $A \in \mathcal{R}(X)$ *такой, что* $A(X^\sim)$ *есть идеал в* M *и* A *есть векторно-решеточный изоморфизм* $X^\sim$ *на* $A(X^\sim)$;

(4) *существует* $F \in (X^\sim)^\sim$ *такой, что* $F(f) > 0$ *для всех* $f > 0$ $(f \in X^\sim)$.

Для случая, когда X есть пространство Орлича, Т. Андо [4] была построена весьма остроумная конструкция представления A, удовлетворяющая условию (2) теоремы 2.2.1.

Однако, как показывает следующая теорема, даже в случае, когда X есть пространство Марцинкевича на отрезке, множество $\mathcal{R}(X)$ может быть пусто.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $M(\psi)$ *есть пространство Марцинкевича на* $[0, 1]$. *Для того чтобы* $\mathcal{R}(M(\psi))$ *было непусто, необходимо, чтобы выполнялись следующие два условия:*

$$a)\ \varliminf_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1; \quad б)\ \varlimsup_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2.$$

В частности, $\mathcal{R}(M(\psi))$ пусто для важного частного случая $\psi(t) = t^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, ибо в этом случае не выполняется условие б).

3. Так как M есть (L)-пространство, то по известной теореме Какутани M векторно-решеточно изоморфно и изометрично некоторому пространству $L^1(\mu^*)$, где (T^*, Σ^*, μ^*) есть пространство с неотрицательной счетно аддитивной (не σ-конечной) мерой μ^*, удовлетворяющее условиям: а) для любого $E \in \Sigma^*$ с $\mu^*(E) > 0$ найдется $F \in \Sigma^*$ такое, что $F \subset E$ и $0 < \mu^*(F) < \infty$; б) $S(\mu^*)$ есть K-пространство.

Заметим, что пространство (T^*, Σ^*, μ^*) и упомянутый изоморфизм M на $L^1(\mu^*)$ в определенном смысле определяются однозначно.

Далее будем отождествлять M с $L^1(\mu^*)$ и с $L^\infty(\mu)^*$.

Идея дальнейших построений заключается в следующем: вместо представлений $A: X^{\sim} \to M = L^1(\mu^*)$ рассматривать „обобщенные представления"

$$R: X^{\sim} \to S(\mu^*).$$

4. Нам понадобятся некоторые сведения из общей теории векторных решеток. Пусть E — векторная решетка. Элемент $1 \in E_+$ называется единицей в E, если $x \wedge 1 > 0$ для всех $x > 0$ $(x \in E)$. Пусть $x, y \in E$; говорят, что x есть осколок элемента y, если $(y - x)\,d\,x$.

Пусть теперь E есть K-пространство. Существует K-пространство W, обладающее следующими свойствами: а) E есть идеал в W; б) если $w \in W$ и $w\,d\,x$ для всех $x \in E$, то $w = 0$; в) любое подмножество в W, состоящее из попарно дизъюнктных элементов, порядково ограничено в W.

Пространство W определяется по E в известном смысле однозначно, оно называется *максимальным расширением* E и обозначается $\mathfrak{M}(E)$. Заметим, например, что $\mathfrak{M}(L^1(\mu)) = S(\mu)$ (этот пример хорошо поясняет смысл понятия максимального расширения).

5. Пусть X и Y произвольные ИП на (T, Σ, μ). Для $f \in X^{\sim}$, $u \in X$ построим $f_{(u)} \in L^{\infty}(\mu^*)$ по формуле $f_{(u)}(x) = f(xu)$, $x \in L^{\infty}(\mu)$.

Определение. Функционалы $f \in X^{\sim}$ и $g \in Y^{\sim}$ будем называть *дизъюнктными* (обозначение: $f\mathcal{D}g$), если для любых $u \in X^+$ и $v \in Y^+$ функционалы $f_{(u)}$ и $g_{(u)}$ дизъюнктны в обычном смысле как элементы K-пространства $L^{\infty}(\mu)^*$.

Заметим, что f и g в этом определении не являются элементами одного и того же K-пространства, поэтому об их дизъюнктности в обычном смысле говорить не приходится.

Обозначим теперь через 1^* функцию, тождественно равную единице на T^*. В пространстве $\mathfrak{M}(X^{\sim})$ фиксируем какую-нибудь единицу 1.

Теорема 2.5.1. *Существует единственная пара* (R_X, V_X), *где* V_X *есть полоса в* $S(\mu^*)$, *а* R_X *есть векторно-решеточный изоморфизм* $\mathfrak{M}(X^{\sim})$ *на* V_X, *удовлетворяющая условиям:* (1) *для любых* $f \in X^{\sim}$, $g \in L^{\infty}(\mu)^*$ *справедливо* $(f\mathcal{D}g) \Leftrightarrow (R_X f\,d\,g)$; (2) $R_X(1)$ *есть осколок элемента* 1^*.

Оператор R_X будем называть *канонической реализацией* пространства $X^{\sim}$.

Теорема 2.5.2. *Пусть R_X и R_Y суть канонические реализации пространств $X^\sim$ и $Y^\sim$. Тогда для любых $f \in X^\sim$ и $g \in Y^\sim$ справедливо*

$$(f\mathscr{D}g) \Leftrightarrow (R_X f d R_Y g).$$

6. В заключение этого параграфа приведем один результат, родственный теоремам 1.4.3 и 1.9.2.

Теорема 2.6.1. *Пусть X есть* БИП *на* (T, Σ, μ). *Положим*

$$H = \{f_{(u)} : f \in X^*,\ u \in X\}.$$

Тогда H есть полоса в $L^\infty(\mu)^*$ и для $\forall h \in H$ справедливо

$$\|h\|_{L^\infty(\mu)^*} = \inf\{\|f\|_{X^*} \cdot \|u\|_X : f \in X^*,\ u \in X,\ f_{(u)} = h\}.$$

§ 3. Интегральное представление линейных операторов

1. В этом параграфе мы приведем обзор результатов, касающихся интегрального представления линейных операторов в виде $(Ux)(s) = \int K(t, s)\, x(t)\, d\mu_1(t)$, где ядро $K(t, s)$ — измеримая функция двух переменных. Основополагающие результаты в этой области были получены во второй половине 30-х годов в работах И. М. Гельфанда [14], Н. Данфорда и Б. Петтиса [20], Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха [26]. Здесь будут изложены результаты, являющиеся продолжением и обобщением этих классических исследований, полученные в течение последнего десятилетия.

Пусть (T_i, Σ_i, μ_i) $(i=1, 2)$ — пространства с полной σ-конечной мерой, (T, Σ, μ) — произведение этих пространств. Всюду далее в этом параграфе через X (соответственно Y) обозначается некоторое идеальное пространство на (T_1, Σ_1, μ_1) (соответственно (T_2, Σ_2, μ_2)).

Линейный оператор $U : X \to Y$ называется *регулярным*, если он множества, ограниченные по упорядочению, переводит в множества, ограниченные по упорядочению ($\Leftrightarrow$ U представим в виде разности двух положительных линейных операторов). Пространство всех регулярных операторов $L^\sim(X, Y)$, упорядоченное при помощи конуса положительных операторов, является K-пространством.

Оператор $U \in L^{\sim}(X, Y)$ называется *порядково непрерывным*, если из $x_n \downarrow 0$ в X следует, что $(Ux_n)(s) \to 0$ μ_2-п. в. $(S \in T_2)$. Пространство $L_n^{\sim}(X, Y)$ всех порядково непрерывных линейных операторов является полосой (компонентой) в $L^{\sim}(X, Y)$.

2. Оператор $U: X \to Y$ называется *интегральным*, если существует μ-измеримая функция $K(t, s)$ $(t \in T_1,\ s \in T_2)$ такая, что для любого $x \in X$ имеем

$$(Ux)(s) = \int K(t, s)\, x(t)\, d\mu_1(t). \tag{1}$$

Очевидно, что $U \in L_n^{\sim}(X, S(\mu_2))$, но, вообще говоря, U может не входить в $L^{\sim}(X, Y)$. Отметим, что $U \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $K(t, s) \geqslant 0$ μ-п. в. Дадим первый критерий интегральной представимости оператора.

Теорема 3.2.1. *Интегральные регулярные операторы, действующие из X в Y, образуют полосу в K-пространстве $L^{\sim}(X, Y)$, порожденную множеством вырожденных операторов*

$$\{\Gamma_{x',y} : x' \in X',\ y \in Y\}, \text{ где } \Gamma_{x'y}(x) = \left(\int xx'\, d\mu\right) y \quad (x \in X).$$

Следствие 3.2.2. *Интегральный оператор U с ядром $K(t, s)$ входит в $L^{\sim}(X, Y)$ тогда и только тогда, когда оператор с ядром $|K(t, s)|$ действует из X в Y. При этом*

$$[|U|(x)]\ (s) = \int |K(t, s)|\, x(t)\, d\mu_1(t)\ (x \in X).$$

3. Приведенный в п. 2 критерий интегральной представимости носит „неявный", невнутренний для оператора характер. Однако из теоремы 3.2.1 может быть получен критерий в терминах свойств самого оператора:

Теорема 3.3.1. *Пусть $U: X \to Y$ — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *U — интегральный оператор*;

2) *если* $0 \leqslant x_n \leqslant x \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *и* $x_n \xrightarrow{(\mu_1)} 0$, *то* $(Ux_n)(s) \to 0$ μ_2-*п. в.*;

3) $U \in L_n^{\sim}(X, S(\mu_2))$ *и если* $\chi_{A_n} \leqslant x \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\mu_1(A_n) \to 0$, *то* $U(\chi_{A_n})(s) \to 0$ μ_2-*п.в.*

Из теоремы 3.3.1 при помощи теоремы Лебега получаем, что если оператор порожден неизмеримым ядром, то это ядро можно заменить измеримым, и тем самым данный оператор является интегральным.

Теорема 3.3.2. *Пусть функция $\Phi(t, s)$ такова, что при любом $x \in X$ для п. в. s определена μ_2-измеримая функция $y(s) = \int \Phi(t, s)\, x(t)\, d\mu_1(t)$. Тогда существует μ-измеримая функция $K(t, s)$ такая, что при любом $x \in X$ имеем*

$$\int K(t, s)\, x(t)\, d\mu_1(t) = \int \Phi(t, s)\, x(t)\, d\mu_1(t) \qquad \mu_2\text{-}п.\ в.$$

(где исключаемое множество меры нуль может зависеть от x).

Если в условиях теоремы 3.3.2 мера μ_1 сепарабельна, то существует μ-измеримая функция $K(t, s)$ такая, что при μ_1-п. в. t имеем $K(t, s) = \Phi(t, s)$ для μ_2-*п. в.* s.

Предложение 3.3.3. *Пусть (T_3, Σ_3, μ_3) — пространство с полной σ-конечной мерой, Z — ИП на (T_3, Σ_3, μ_3).*

1) *Если $U \in L^{\sim}(Z, X)$ — интегральный оператор, $V \in L_n^{\sim}(X, S(\mu_2))$, то $W = VU$ — интегральный оператор.*

2) *Если $V \in L_n^{\sim}(X, Y), U: X \to S(\mu_3)$ — интегральный оператор, то $W = UV$ — интегральный оператор.*

4. Приведем определения еще двух классов линейных операторов. Пусть E — банахово пространство, X — ИП на (T_1, Σ_1, μ_1). Оператор $U: E \to X$ называется *оператором с абстрактной нормой*, если существует элемент

$$|U| = \sup \{|U_e| : \|e\| \leqslant 1\}$$

в K-пространстве X. Пространство всех операторов с абстрактной нормой обозначим через $L_A(E, X)$.

Оператор $U: X \to E$ называется *мажорированным*, если существует функция $x' \in X'_+$ такая, что $\|Ux\| \leqslant \int |x|\, x'\, d\mu_1$ $\forall x \in X$. Среди всех таких функций x' существует наименьшая x'_U. Пространство всех мажорированных операторов обозначим через $M_{X_n^{\sim}}(X, E)$.

Если X — БИП с условием (A), то линейный непрерывный оператор $U: X \to E$ является мажорированным тогда и только тогда, когда

$$\|U\|_S = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|U(\chi_{A_k})\| : A_k \cap A_m = \varnothing \ (k \neq m), \right.$$
$$\left. \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k} \right\|_X \leqslant 1 \right\} < \infty,$$

причем $\|U\|_S = \|x'_U\|'$.

5. Здесь мы приведем некоторые сведения о пространствах со смешанной нормой. Пусть X — ИП на (T_1, Σ_1, μ_1), Y — БИП на (T_2, Σ_2, μ_2), причем норма в Y удовлетворяет условию $(\mathcal{C})$ (см. § 1.7).

Через $X[Y]$ обозначим пространство всех μ-измеримых функций $K(t, s)$ $(t \in T_1,\ s \in T_2)$ таких, что:

1) при п. в. t функция $s \to K(t, s)$ входит в Y;

2) функция $w(K)(t) = \|K(t, \cdot)\|$ входит в X.

$X[Y]$ — ИП на (T, Σ, μ), что вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3.5.1. *Пусть $K \in S(\mu)$, F — непустое множество неотрицательных функций в $S(\mu_2)$. Тогда функция*

$$d_F(K)(t) = \sup \left\{ \int |K(t, s)|\, y(s)\, d\mu_2(s) : y \in F \right\}$$

μ_1-измерима (здесь идет речь о поточечном супремуме). Более того, существует такая последовательность $y_n \subset F$, что $d_F(K)(t) = \sup\limits_n \left\{ \int |K(t, s)|\, y_n(s)\, d\mu_2(s) \right\}$ μ_1-п. в.

Если X — НИП, то $X[Y]$ становится НИП при введении следующей нормы: $\|K\| = \|w(K)\|_X$.

Теорема 3.5.2. *Если X — БИП, то $X[Y]$ полно.*

Теорема 3.5.3. *В НИП $X[Y]$ выполнено условие (A) тогда и только тогда, когда оно выполнено в X и Y.*

Теорема 3.5.4. $(X[Y])' = X'[Y']$, *причем, если X — БИП, то равенство справедливо не только по запасу элементов, но и по норме.*

6. Пусть X — ИП на (T_1, Σ_1, μ_1), Y — БИП на (T_2, Σ_2, μ_2).

Теорема 3.6.1. *Если $U \in L_A(Y, X)$ — интегральный оператор*

$$(Uy)(t) = \int K(t, s)\, y(s)\, d\mu_2(s), \quad y \in Y \tag{2}$$

с μ-измеримым ядром $K(t, s)$, то $K \in X[Y']$ и $|U| = w(K)$. Обратно, любая функция $K \in X[Y']$ определяет интегральный оператор $U \in L_A(Y, X)$.

Теорема 3.6.2. *Если $U \in M_{\tilde{X}_n}(X, Y)$ — интегральный оператор (1) с ядром $K(t, s)$, то $K \in X'[Y'']$, причем $x'_U = w(K)$. Если $X = X''$, то и обратно, если $K \in X'[Y]$, то формула (1) определяет оператор $U \in M_{\tilde{X}_n}(X, Y)$.*

Приведем теперь результаты об интегральном представлении операторов с абстрактной нормой и мажорированных операторов. Напомним, что $Y_{(A)}$ — ИП элементов с (o)-непрерывной нормой (см. § 1.6).

Теорема 3.6.3. *Пусть* $\operatorname{supp} Y_{(A)} = \operatorname{supp} Y$. *Общий вид операторов* U *класса* $L_A(Y, X)$ *дается формулой* (2), *где* $K \in X[Y']$.

Следствие 3.6.4. *Пусть* Y — *как в теореме* 3.6.3. *Тогда формула* (2) *дает общий вид линейного непрерывного оператора из* Y *в* L^∞ (T_1, Σ_1, μ_1), *причем*

$$\|U\| = \operatorname*{vraisup}_t \|K(t, \cdot)\|_{Y'}.$$

Теорема 3.6.5. *Оператор* $U \in L_A(Y, X)$ *допускает интегральное представление* (2) *тогда и только тогда, когда из* $y_n \to 0$ *в слабой топологии* $\sigma\left(Y, Y_n^\sim\right)$ *следует* $(Uy_n)(t) \to 0$ μ_1-*п. в.*

Теорема 3.6.6. *Пусть* $\operatorname{supp} Y_{(A)} = \operatorname{supp} Y$. *Общий вид операторов* U *класса* $M_{X_n^\sim}(X, Y')$ *дается формулой* (1), *где* $K \in X'[Y']$.

Следствие 3.6.7. *Пусть* Y — *как в теореме* 3.6.6. *Тогда формула* (1) *дает общий вид линейного непрерывного оператора из* $L'(T_1, \Sigma_1, \mu_1)$ *в* Y', *причем*

$$\|U\| = \operatorname*{vraisup}_t \|K(t, \cdot)\|_{Y'}.$$

7. Пусть S_C — комплексное пространство измеримых функций. Тогда точно так же, как это сделано в § 1, можно определить ИП, НИП и БИП в S_C, а далее и все остальные понятия, связанные с этими объектами. При этом почти все результаты § 1 и все результаты § 3 переносятся на комплексный случай. Отметим, в частности, что теорема 3.3.1 является новой даже тогда, когда $X = Y = L^2(\mathscr{D})$, где $\mathscr{D}$ — произвольное измеримое подмножество в R^n.

§ 4. Аналитическое представление линейных операторов при помощи измеримых вектор-функций

1. Задачу об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой и мажорированных операторов можно поставить более общим образом, чем в § 3. Именно одно из пространств можно считать абстрактным банаховым пространством и искать представление оператора при помощи вектор-функции.

Всюду далее E — банахово пространство, X — ИП на (T, Σ, μ), где (T, Σ, μ) — произвольное пространство с полной σ-конечной мерой. Функция $\overleftarrow{w}: T \to E^*$ называется *E-скалярно измеримой*, если для любого $e \in E$ измеримы функции $w_e(t) = \langle e, \overleftarrow{w}(t) \rangle$. При этом существует $v(\overleftarrow{w}) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{|w_e| : \|e\| \leqslant 1\} \in S(\mu)$ (отметим, что речь идет о супремуме в K-пространстве $S(\mu)$, а не о поточечном супремуме). Функции $\overleftarrow{w_i}: T \to E^*$ $(i=1, 2)$ называются *E-скалярно эквивалентными*, если при любом $e \in E$ имеем $\langle e, \overleftarrow{w_1}(t) \rangle = \langle e, \overleftarrow{w_2}(t) \rangle$ п. в.

Через $s(E)$-$X(E^*)$ обозначим пространство всех E-скалярно измеримых функций $\overleftarrow{w}: T \to E^*$ таких, что $v(\overleftarrow{w}) \in X$ (E-скалярно эквивалентные функции отождествляются). Если X — БИП, то $s(E)$-$X(E^*)$ — банахово пространство, если мы введем норму $\|\overleftarrow{w}\| = \|v(\overleftarrow{w})\|_X$.

Функция вида

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(t)\, e_k \left(e_k \in E,\ A_k \in \Sigma'\right)$$

называется *конечнозначной*. Функция $\vec{z}: T \to E$ называется *измеримой*, если существует последовательность $\{\vec{z}_n\}$ конечнозначных функций такая, что $\|\vec{z}_n(t) - \vec{z}(t)\|_E \to 0$ п. в. Если $\vec{z}$ — измеримая функция и $\int \|\vec{z}(t)\|_E \, d\mu(t) < \infty$, то существует интеграл Бохнера $\int \vec{z}(t)\, d\mu(t) \in E$.

Через $X(E)$ обозначим пространство всех измеримых функций $\vec{z}: T \to E$ таких, что $\|\vec{z}(\cdot)\|_E \in X$. Если X — БИП, то $X(E)$ — банахово пространство, если мы введем норму

$$\|\vec{z}\| = \| \, \|\vec{z}(\cdot)\|_E \|_X .$$

Через $X(E)_n^{\sim}$ обозначим пространство всех линейных функционалов φ на $X(E)$ таких, что из $\|\vec{z}_n(t)\| \to 0$ п. в., $\|\vec{z}_n(\cdot)\| \leqslant x \in X$ $(\vec{z}_n \in X(E))$ следует $\varphi(\vec{z}_n) \to 0$.

Если X — БИП с условием (A), то $X(E^*) = X(E)_n^{\sim}$.

Следующая теорема полностью решает вопрос о представлении скалярно измеримыми вектор-функциями.

Теорема 4.1.1. *1) Отображение P, сопоставляющее каждому элементу $\overleftarrow{w}\in s(E)\text{-}X(E^*)$ оператор*

$$(P\overleftarrow{w})(e)=\langle e, \overleftarrow{w}\rangle \quad (e\in E), \tag{1}$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(E)\text{-}X(E^*)$ на $L_A(E, X)$, причем $v(\overleftarrow{w})=|P\overleftarrow{\omega}|$.

2) Отображение Q, сопоставляющее каждому элементу $\overleftarrow{w}\in s(E)\text{-}X'(E^*)$ оператор $Q\overleftarrow{w}$ по формуле

$$\langle (Q\overleftarrow{w})\,x, e\rangle = \int x(t)\,\langle e, \overleftarrow{w}(t)\rangle\, d\mu(t)\ (x\in X,\ e\in E), \tag{2}$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(E)\text{-}X'(E^*)$ на $M_{X_n^\sim}(X, E^*)$, причем $v(\overleftarrow{w})=x'(Q\overleftarrow{w})$.

3) Отображение R, сопоставляющее каждому элементу $\overleftarrow{w}\in s(E)\text{-}X'(E_n)$ функционал $R\overleftarrow{w}$ по формуле

$$(R\overleftarrow{w})(\overrightarrow{z}) = \int \langle \overrightarrow{z}(t), \overleftarrow{w}(t)\rangle\, d\mu(t)\ (\overrightarrow{z}\in X(E)), \tag{3}$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(E)\text{-}X'(E^*)$ на $X(E)_n^\sim$, причем, если X — БИП, *то R — изометрия.*

2. Рассмотрим теперь значительно более сложный вопрос, когда в формулах (1)—(3) функцию $\overleftarrow{w}: T\to E^*$ можно выбрать измеримой.

Оператор $U: E\to X$ называется *(r_X)-компактным*, если существует $r\in X_+$ такой, что U — компактный оператор из E в банахово пространство

$$X_r=\{x\in X: \|x\|_r=\inf\{\lambda>0: |x|\leqslant\lambda r\}<\infty\}.$$

Теорема 4.2.1. *Пусть X —* БИП *с условием (A) или $X=S(\mu)$, $U\in L_A(E, X)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) существует

$$\overleftarrow{w}\in X(E^*): (Ue)(t)=\langle e, \overleftarrow{w}(t)\rangle\ (e\in E);$$

2) U — (r_X)-компактен.

Теорема 4.2.2. *Если линейный оператор $U:L^1(\mu)\to E$ слабо компактен, то существует*

$$\vec{z}\in L^\infty(E): Ux=\int x(t)\vec{z}(t)\,d\mu(t),\ \ (x\in L^1(\mu)),$$

причем $\|U\|=\operatorname{vraisup}_t\|\vec{z}(t)\|_E$.

Будем говорить, что банахово пространство E обладает *свойством Радона — Никодима* ($E\in(RN)$), если для любого (T,Σ,μ) и любой меры $\vec{m}:\Sigma\to E$ конечной вариации и абсолютно непрерывной относительно μ существует функция $\vec{z}\in L^1(\mu)(E)$ такая, что $\vec{m}(A)=\int_A\vec{z}(t)\,d\mu(t)$ $(A\in\Sigma)$.

Можно сказать, что $E^*\in(RN)$ тогда и только тогда, когда в каждом из представлений (1)—(3) функцию w всегда можно выбрать измеримой. Дадим внутренние характеристики пространств со свойством Радона—Никодима.

Теорема 4.2.3. *$E^*\in(RN)$ тогда и только тогда, когда E квазисепарабельно, т. е. любое сепарабельное подпространство в E имеет сепарабельное сопряженное.*

Отметим, что если E — БИП, то квазисепарабельность эквивалентна выполнению условия (A) в E и E^*. Из теоремы 4.2.3 вытекают классические теоремы о том, что рефлексивное пространство и сепарабельное сопряженное обладают свойством Радона—Никодима.

Будем говорить, что банахово пространство E обладает *свойством Крейна—Мильмана*, если любое ограниченное выпуклое замкнутое по норме множество есть замкнутая (по норме) выпуклая оболочка своих экстремальных точек.

Теорема 4.2.4. 1) *Если $E\in(RN)$, то E обладает свойством Крейна — Мильмана.* 2) *Если E — сопряженное пространство, то $E\in(RN)$ тогда и только тогда, когда E обладает свойством Крейна — Мильмана.*

§ 5. О строении банахова пространства, сопряженного к пространству Харди векторнозначных аналитических функций

1. Пусть E — комплексное банахово пространство. Для пространств $L^p(E)$ при естественной двойственности имеем

$$L^p(E)^*=s(E)-L^{p'}(E^*),\ 1\leqslant p<\infty,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Если $E^* \in (RN)$, то $L^p(E)^* = L^{p'}(E^*)$ (см. § 4). Если мы естественным образом определим *пространство Харди* $H^p(E)$, то, по крайней мере, для сепарабельного рефлексивного E можно было бы ожидать, что $H^p(E)^* = H^{p'}(E^*)$ $(1<p<\infty)$. Однако это оказалось не так, причем при доказательстве этого неожиданно нашли применение теоремы об операторах в идеальных пространствах. Пусть далее L^p — это комплексное L^p на окружности с нормированной мерой Лебега.

Через $H^p(E)$ обозначим подпространство в $L^p(E)$, состоящее из всех $\vec{f} \in L^p(E)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \vec{f}(t)\, e^{-int}\, dt = 0,\ n = -1, -2, \ldots$$

Через $H^p(E^*)_1$ обозначим подпространство в $s(E) = L^p(E^*)$, состоящее из всех $\overleftarrow{g} \in s(E)\text{-}L^p(E^*)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overleftarrow{g}(t)\, e^{-int} dt = 0,\ n = -1, -2, \ldots$$

Как и в скалярном случае, пространства $H^p(E)$ и $H^p(E^*)_1$ можно отождествить с пространствами аналитических функций в круге. Если $E^* \in (RN)$, то $H^p(E^*) = H^p(E^*)_1$.

2. Пусть $1<p<\infty$; $P: L^p \to H^p$ — канонический проектор; именно, если $f \in L^p$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int},$$

то Pf имеет ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Пространства $H^p(E)$ и $H^p(E^*)_1$ находятся в естественной двойственности:

$$\langle \vec{f}, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle \vec{f}(t), \overleftarrow{g}(t)\rangle\, dt,\ (\vec{f} \in H^p(E),\ \overleftarrow{g} \in H^p(E^*)_1).$$

Будем писать, что $(E \in H^p_*)$, если $H^p(E)^* = H^{p'}(E^*)_1$. Пусть 1_E — тождественный оператор на E; $L^p \otimes E$ — линейная оболочка функций $(f \otimes e)(t) = f(t)e$, $(f \in L^p,\ e \in E)$ в $L^p(E)$ с нормой, индуцированной из $L^p(E)$. Оператор $P \otimes 1_E$ из $L^p \otimes E$ в себя определяется формулой

$$(P \otimes 1_E)(f \otimes e) = (Pf) \otimes e \quad (f \in L^p,\ e \in E).$$

Теорема 5.2.1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $P \otimes 1_E : L^p \otimes E \to L^p \otimes E$ *непрерывен*;

2) $E \in (H^p_*)$;

3) *некоторое (любое) нечетное сопряженное E входит в* (H^p_*);

4) *некоторое (любое) четное сопряженное E входит в* $(H^{p'}_*)$.

Если $E \in (H^p_*)$ при любом p $(1 < p < \infty)$, то пишем $E \in (H_*)$.

Следствие 5.2.2. 1) *Условие* (H^p_*) *наследственно.*

2) *Если* $\exists p, 1 < p < \infty : E \in (H^p_*)$, *то* $E \in H_*$.

3) *Если E — подпространство в* $L^r(\mu)$, $1 < r < \infty$, *то* $X \in (H_*)$ *(более того,* $H^p(E)^* = H^{p'}(E^*)$*)*.

3. Как отмечено в § 3.7, все понятия, связанные с операторами в вещественных идеальных пространствах, осмысленны и в комплексном случае. Здесь мы приведем один результат, характеризующий регулярные операторы в L^p.

Будем говорить, что в E *равномерно вкладываются пространства* l^1_n, если существует $c > 0$ такое, что для любого натурального n найдется подпространство $Y_n \subset \subset E$:

$$d(Y_n, l^1_n) = \inf \{\|U\| \cdot \|U^{-1}\| : U : l^1_n \to Y_n \text{ изоморфизм}\} < c.$$

Теорема 5.3.1. *Пусть в E равномерно вкладываются пространства l^1_n, $U : L^p \to L^p$ — линейный непрерывный оператор* $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. *Если оператор* $U \otimes 1_E : L^p \otimes E \to L^p \otimes E$ *непрерывен, то* $U \in L^\sim(L^p, L^p)$.

Так как проектор $P \notin L^\sim(L^p, S)$, то из теорем 5.2.1 и 5.3.1 получаем

Теорема 5.3.2. *Если* $(E \in H_*)$, *то в E нельзя равномерно вложить пространства l^1_n (т. е. E — B-выпукло).*

Из теоремы 5.3.2 получаем, что если

$$E=\left(\sum_{n=1}^{\infty} l_n^1\right)_{l^r}=\left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}: x_n \in l_n^1,\right.$$

$$\left.\|(x_n)\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{l_n^1}^{r}\right)^{1/r}<\infty\right\},\ 1<r<\infty,$$

то E — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, но $E \notin (H_*)$.

§ 6. О комплексном методе интерполяции в БИП

1. Для произвольной интерполяционной пары комплексных банаховых пространств (E_0, E_1) А. Кальдерон [55] построил два комплексных метода интерполяции, в результате которых получают интерполяционные между E_0 и E_1 с нормальным типом s пространства $[E_0, E_1]_s$ и $[E_0, E_1]^s$ $(0<s<1)$ (см. [31]). В том случае, когда E_0 и E_1 — БИП, А. Кальдероном была предложена конструкция построения БИП $E_0^{1-s}E_1^s$, тесно связанного с введенными им интерполяционными пространствами и значительно проще устроенного. Здесь мы приведем полученные недавно дальнейшие результаты о связи этих пространств.

2. Пусть далее X_0, X_1 суть комплексные БИП на (T, Σ, μ). Через $X(s)=X_0^{1-s}X_1^s$ обозначается БИП, состоящее из всех $x \in S$ таких, что $|x| \leqslant \lambda x_0^{1-s}x_1^s$ для некоторого $\lambda \geqslant 0$ и некоторых $0 \leqslant x_j \in X_j$ с $\|x_j\|_{X_j} \leqslant 1$ $(j=0, 1)$. Для $x \in X(s)$ за норму $\|x\|_{X(s)}$ принимается инфимум всех возможных λ в предыдущем неравенстве. В [55] показано, что $[X_0, X_1]_s \subset X(s) \subset [X_0, X_1]^s$ и нормы операторов вложения $\leqslant 1$; однако, вообще говоря, эти три пространства различны.

3. Пространство $X(s)$ в отличие от $[X_0, X_1]_s$ и $[X_0, X_1]^s$ не является, вообще говоря, интерполяционным между X_0 и X_1, даже если нормы в X_0 и X_1 (o)-полунепрерывны [56]. В следующих двух теоремах осуществляется редукция комплексных методов к конструкции $X(s)$.

Теорема 6.3.1. *Норма в $[X_0, X_1]_s$ совпадает с нормой, индуцированной из $X(s)$, а само пространство $[X_0, X_1]_s$ является замыканием множества $X_0 \cap X_1$ в $X(s)$.*

Если в X_0 и X_1 выполнены условия (B) и (C), то $X(s)=[X_0, X_1]^s$. В общем случае справедлива

Теорема 6.3.2. *Если в X_0 и X_1 выполнено условие (C), то замкнутый единичный шар пространства $[X_0, X_1]^s$ совпадает с замыканием единичного шара пространства $X(s)$ в банаховом пространстве X_0+X_1.*

При доказательстве этих теорем используется представление регулярных функционалов из § 2.

Библиографические указания

Список литературы не претендует на полноту. Если результат отражен в монографической литературе, то мы, как правило, делаем ссылку на книгу, а не на первоисточник.

§ 1. Общие вопросы см. в [12, 21, 24, 27, 31, 40, 41]. Теорему 1.3.1 (б, в) см. в [3], 1.4.1 — в [13], 1.4.3 (б) и 1.9.2 — в [35], 1.5.1 — в [24], 1.5.2 (а) $\Leftrightarrow$ (в) — в [1], 1.6.1 (1) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) — в [34 и 39], (1) $\Leftrightarrow$ (8) — в [33], 1.7.2 (1) $\Leftrightarrow$ (3) — в [44], (1) $\Leftrightarrow$ (4) — в [37], 1.9.1 (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) — в [46], 1.13.1 — в [25], 1.13.2 — в [38], 1.13.3 — в [2], 1.13.4 — в [4] и [38], 1.13.5 (а) — в [38]. Результаты п. 14 изложены в [11]. Отметим, что они допускают обобщение на случай пространств измеримых функций со значениями в рефлексивном банаховом пространстве. Теорема 1.13 (б), полученная Г. Я. Лозановским, излагается впервые. Теоремы 1.15.1 и 1.15.2 получены А. В. Бухваловым и излагаются впервые.

§ 2. Основные результаты этого параграфа изложены в [13, 36]. Теоремы 2.2.1, 2.2.2 и 2.6.1 получены Г. Я. Лозановским и излагаются впервые.

§ 3. Общие вопросы см. в [14, 20, 21, 26, 27, 30, 31]. Теоремы 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2 и предложение 3.3.3 доказаны в [8] (см. также [9, 32, 45]), следствие 3.2.2 — в [42] (см. также [8]). По поводу результатов п. 5 и 6 см. [6, 10, 16—18, 28, 29].

§ 4. Общие вопросы см. в [14, 19—23; 26, 27; 29—31; 43, 48—53]. Теорему 4.1.1 — см. в [5, 53], теорему 4.2.1 — в [7, 19], теоремы 4.2.3, 4.2.4 — в [48, 49].

§ 5. Результаты, изложенные в этом параграфе, получены А. В. Бухваловым и излагаются впервые. Теоремы, близкие к 5.3.1, излагаются в [54]. По поводу теории пространств см. [15].

§ 6. Конструкция $X(\mathfrak{s})$ введена в [55] и изучалась, например, в [35, 36, 57]. Теорема 6.3.1 доказана в [58], а теорема 6.3.2 получена Г. Я. Лозановским и публикуется впервые.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрамович Ю. А.** Некоторые теоремы о нормированных структурах.— «Вестн. ЛГУ», 1971, № 13, с. 5—11.
2. **Абрамович Ю. А., Лозановский Г. Я.** О некоторых числовых характеристиках KN-линеалов.— «Мат. заметки», 1973, т. 14, № 5, с. 723—732.
3. **Amemiya I.** On ordered topological linear spaces.— In: Proc. of Symp. on linear spaces. Jerusalem, 1960, p. 14—21.
4. **Ando T.** Linear functionals on Orlicz spaces.—„Niew Arch. Wiskunde“, 1960, v. 8, N 1, p. 4—16.
5. **Бухвалов А. В.** Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 5, с. 1012—1015.
6. **Бухвалов А. В.** О пространствах со смешанной нормой.— «Вестн. ЛГУ», 1973, № 19, с. 5—12.
7. **Бухвалов А. В.** Аналитическое представление операторов при помощи измеримых вектор-функций.— «Вестн. ЛГУ», 1974, № 7, с. 157—158.
8. **Бухвалов А. В.** Об интегральном представлении линейных операторов.— В кн.: Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР. Л., «Наука», 1974, т. 47, с. 5—14.
9. **Бухвалов А. В.** Критерий интегральной представимости линейных операторов.— «Функциональный анализ и его приложения», 1975, т. 9, № 1, с. 51.
10. **Бухвалов А. В.** Интегральные операторы и представление вполне линейных функционалов на пространствах со смешанной нормой.— «Сиб. мат. журн.», 1975, т. 16, № 3, с. 483—493.
11. **Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я.** О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 212, № 6, с. 1273—1275.
12. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М. Физматгиз, 1961. 407 с.
13. **Вулих Б. З., Лозановский Г. Я.** О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах.— «Мат. сб.», 1971, т. 84 (126), № 3, с. 331—352.
14. **Гельфанд И. М.** Abstrakte funktionen und lineare operatoren.— «Мат. сб.», т. 4 (46), 1938, 235—286.
15. **Гофман К.** Банаховы пространства аналитических функций. М., ИЛ, 1963. 311 с.
16. **Грибанов Ю. И.** Линейные операторы в совершенных пространствах функций. III.— «Изв. вузов. Математика», 1970, № 9, с. 37—44.

17. **Грибанов Ю. И.** Об измеримости одной функции.— «Изв. вузов. Математика», 1970, № 3, с. 22—26.
18. **Грибанов Ю. И.** Об измеримости ядер интегральных операторов.— «Изв. вузов. Математика», 1972, № 7, с. 31—34.
19. **Grothendieck A.** Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires.—„Mem. Amer. Math. Soc.", 1955, v. 16. 140 p.
20. **Dunford N., Pettis B. J.** Linear operators on summable functions.—„Trans. Amer. Math. Soc.", 1940. v. 47, N 3, p. 323—392.
21. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962. 895 с.
22. **Dinculeanu N.** Vector measures. Berlin, 1966. 432 p.
23. **Diudonné J.** Sur le théorème de Lebesgue — Nnkodym. V.—„Canad. J. Math.", 1951, v. 3, p. 129—139.
24. **Забрейко П. П.** Идеальные пространства функций. I.— «Вестн. Яросл. ун-та», 1974, т. 8, с. 12—52.
25. **Yosida K., Hewitt E.** Finitely additive measures.—„Trans. Amer. Math. Soc.", 1952, v. 72, p. 46—66.
26. **Канторович Л. В., Вулих Б. З.** Sur la representation des opérations linéaries.—„Comp. Math.", 1937, v. 5, p. 119—165.
27. **Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.—Л., ГИТТЛ, 1950. 548 с.
28. **Коротков В. Б.** Интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими условиям Карлемана и Ахиезера. I.— «Сиб. мат. журн.», 1971, т. 12, № 5, с. 1041—1055.
29. **Коротков В. Б.** Интегральные представления линейных операторов.— «Сиб. мат. журн.», 1974, т. 15, № 3, с. 529—545.
30. **Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., «Наука», 1966. 499 с.
31. **Функциональный анализ.** Под ред. С. Г. Крейна. Изд. 2-е. М., «Наука», 1972. 544 с. (Справ. мат. б-ка.)
32. **Лозановский Г. Я.** О почти интегральных операторах в K-пространствах.— «Вестн. Ленингр. ун-та», 1966, № 7, с. 35—44.
33. **Лозановский Г. Я.** О проекторах в некоторых банаховых структурах.— «Мат. заметки», 1968, т. 4, № 1, с. 41—44.
34. **Лозановский Г. Я.** Об изоморфных банаховых структурах.— «Сиб. мат. журн.», 1969, т. 10, № 1, с. 93—98.
35. **Лозановский Г. Я.** О некоторых банаховых структурах.— «Сиб. мат. журн.», 1969, т. 10, № 3, с. 584—599.
36. **Лозановский Г. Я.** О реализации пространств регулярных функционалов и некоторых ее применениях.— «Докл. АН СССР», 1969, т. 188, № 3, с. 522—524.
37. **Лозановский Г. Я.** О нормированных структурах с полунепрерывной нормой.— «Сиб. мат. журн.», 1971, т. 12, № 1, с. 232—234.
38. **Лозановский Г. Я.** О локализованных функционалах в векторных структурах.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 19. Харьков, 1974, с. 66—80.
39. **Лозановский Г. Я., Меклер А. А.** Вполне линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах.— «Изв. вузов. Математика», 1967, № 11, с. 47—53.
40. **Luxemburg W. A. J.** Notes on Banach function spaces.—„Proc. Acad. Sci.", Amsterdam, 1965, A 68, p. 229—248, 415—446, 646—667.

41. **Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.** Notes on Banach function spaces.— "Proc. Acad. Sci.", Amsterdam, 1963, A 66, p. 135—153.
42. **Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.** The linear modulus of an order bounded linear transformation I, II.— "Proc. Acad. Sci.", Amsterdam, 1971, A 74, N 5, p. 422—447.
43. **Митягин Б. С., Шварц А. С.** Функторы в категориях банаховых пространств.— «Усп. мат. наук», 1964, т. 19, № 2, с. 65—130.
44. **Mori T., Amemiya I., Nakano H.** On the reflexivity of semicontinuous norms.—"Proc. Japan Acad.", 1955, v. 31, N 10, p. 684—685.
45. **Nakano H.** Product spaces of semi-ordered linear spaces.— "J. Faculty Sci. Hokkaido Univ. Sec. I", 1953, v. 12, N 3, p. 163—210.
46. **Седаев А. А.** Об одной задаче Г. Я. Лозановского.— В кн.: Труды НИИМ Воронежского государственного университета. Воронеж, 1974, вып. 14, с. 63—67.
47. **Семенов Е. М.** Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Автореф. докт. дис. Воронеж, 1968. 14 с.
48. **Uhl J. J. Tr.** A note on the Radon — Nicodym property for Banach spaces.— "Rev. roumaine math. pures et appl.", 1972, v. 17, N 1, p. 113—115.
49. **Phelps R. R.** Dentability and extreme points in Banach spaces.— "J. Functional Analysis", 1974, v. 16, N 1, p. 78—90.
50. **Chatterji S. D.** Martingale convergense and the Radon — Nikodym theorem in Banach spaces.—„Math. Scand.", 1968/69, v. 22, p. 21—44.
51. **Phillips R. S.** On weaxly compact subsets of a Banach spaces.— "Amer. J. Math.", 1943, v. 65, p. 108—136.
52. **Ellis H. W., Halperin I.** Function spaces determined by a levelling length function.—"Canad. J. Math.", 1953, v. 5, p. 576—592.
53. **Бухвалов А. В.** Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой.— «Изв. вузов. Математика», 1975, № 11, с. 1—12.
54. **Бухвалов А. В.** О двойственности функторов, порождаемых пространствами вектор-функций. — «Изв. АН СССР. Серия мат.», 1975, т. 39, № 6, с. 1284—1309.
55. **Calderon A. P.** Intermediate spaces and interpolation, the complex method.—"Studia math.", 1964, v. 24, N. 2, p. 113—190.
56. **Лозановский Г. Я.** Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона.— «Функциональный анализ и его приложения», 1972, т. 6, № 4, с. 89—90.
57. **Лозановский Г. Я.** О банаховых структурах. III.— «Сиб. мат. журн.», 1972, т. 13, № 6, с. 1304—1313.
58. **Шестаков В. А.** О комплексной интерполяции в банаховых пространствах измеримых функций.— «Вестн. ЛГУ», 1974, № 19, с. 64—68.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБР ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. М. Вувуникян

1. Изучение некоторых общих классов полугрупп эндоморфизмов локально выпуклых пространств показало, что их естественно рассматривать (и это чрезвычайно важное обстоятельство при их исследовании) как представления сверточных локально выпуклых алгебр обобщенных функций с носителями на положительной полуоси. Так, например, полугруппы класса C_0 [1] есть, по существу, представления алгебры $\mathscr{M}_+$ мер Радона с положительными компактными носителями, снабженной слабой топологией; равностепенно непрерывные полугруппы [2] — представления алгебры L_+ суммируемых на полуоси функций (см. [16]); полугруппы-распределения Ж.— Л. Лионса [4] — представления алгебры $\mathscr{K}_+$ бесконечно дифференцируемых функций на положительной полуоси с финитными справа носителями. Эти и многие другие примеры приводят к общему понятию эволюционного представления в локально выпуклом пространстве. Основополагающую роль при их изучении играют связи между операторнозначными фундаментальными функциями эволюционных операторов, обобщенной корректностью задач Коши и эволюционными представлениями, установленные Ж.— Л. Лионсом для полугрупп-распределений в банаховом пространстве [4].

Полугруппы операторов в банаховом пространстве исследуются с помощью хорошо разработанного аппарата резольвенты производящего оператора. В случае же локально выпуклого пространства производящие операторы полугрупп могут не иметь резольвенты ни в одной точке. Причина этого заключается в том, что операция умножения в алгебре эндоморфизмов ненормируемого локально выпуклого пространства, снабженного топологией равномерной сходимости на некоторой совокупности ограниченных множеств, не является непрерывной. Поэтому вопросы изучения эволюционных представлений требуют привлечения нового аппарата.

Такой аппарат — резольвентная последовательность оператора — создан в 1970 г. [10] и развивался (все более совершенствуясь и одновременно упрощаясь) по мере использования для решения некоторых вопросов теории полугрупп-обобщенных функций [11 — 15]. Он также плодотворно применялся для порождения различных классов однопараметрических полугрупп операторов в локально выпуклом пространстве.

В дальнейшем было замечено, что так как эволюционное представление можно восстановить из его следа на подпространстве основных функций с носителями на сколь угодно малой окрестности нуля, то вместо всей резольвентной последовательности достаточно рассматривать любой член этой последовательности, названный в [15] квазирезольвентой оператора.

Обозначения. Мы всюду будем пользоваться следующими традиционными обозначениями: $\mathcal{N}$ — множество натуральных чисел; $\boldsymbol{R}$ — числовая ось; $\boldsymbol{C}$ — поле комплексных чисел; $\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов из локально выпуклого пространства X в локально выпуклое пространство Y, снабженное топологией равномерной сходимости на совокупности всех ограниченных подмножеств пространства X; $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$; $X' = \mathcal{L}(X, \boldsymbol{R})$; $\mathfrak{P}_X$ — мультинорма в X; $\overset{0}{C}{}^m_{[0,a]}$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $\boldsymbol{R}_+$ функций с носителями в $[0, a]$ и стандартной нормой.

2. Основные определения. Пусть $\mathcal{K}_+ = \varinjlim_{a\to+\infty} \varprojlim_{m\to\infty} \overset{0}{C}{}^m_{[0,a]}$ — алгебра бесконечно дифференцируемых финитных справа функций на $\boldsymbol{R}_+ = [0, +\infty)$.

Определение 1. Локально выпуклую алгебру $\mathfrak{A}$ будем называть *алгеброй обобщенных функций*, если

1) $\mathfrak{A}$ — подалгебра $\mathcal{K}'_+$

2) $\mathcal{K}_+$ — плотная подалгебра $\mathfrak{A}$.

Обозначим $\mathfrak{A}^+ = \{f \in \mathfrak{A}: \operatorname{supp} f \subset \boldsymbol{R}^+ = (0, +\infty)\}$.

Определение 2. *Эволюционным представлением* алгебры обобщенных функций $\mathfrak{A}$ в X называется непрерывный гомоморфизм T алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathscr{L}(X)$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

1) $T(\mathfrak{A}^+)X$ плотно в X;

2) если $T(\mathfrak{A}^+)x=\{0\}$, то $x=0$.

Пример. Пусть $\mathfrak{A}=\mathscr{K}_+$ и U — непрерывная полугруппа операторов в пространстве X. Тогда равенство

$$T(f)x=\int\limits_{R_+} f(t)\,U(t)\,x\,dt \quad (f\in\mathscr{K}_+;\ x\in X)$$

определяет, как легко проверить, эволюционное представление алгебры $\mathscr{K}_+$.

Может случиться, что непрерывное представление T алгебры $\mathfrak{A}$ в X не удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 2. Покажем, как его можно преобразовать в эволюционное представление.

Пусть X_0 — замыкание $T(\mathfrak{A}^+)X$. Очевидно, что X_0 — инвариантное подпространство для всех операторов $T(f)$. Тогда $T_0=T|_{X_0}: f\to T(f)|_{X_0}$ является представлением алгебры $\mathfrak{A}$ в X_0. Но $T(\mathfrak{A}^+)X_0$ плотно в X_0, так как замыкание подпространства $T(\mathfrak{A}^+)X$ содержит замыкание множества $T(\mathfrak{A}^+*\mathfrak{A}^+)X$, и $\mathfrak{A}^+*\mathfrak{A}^+$ плотно в $\mathfrak{A}^+$. Следовательно, T_0 удовлетворяет условию 1). Рассмотрим теперь $\widetilde{N}=\left\{x\in X_0 \mid T_0x|_{\mathfrak{A}^+}=0\right\}$ и фактор-пространство $X_0|\widetilde{N}$.

Будем обозначать через $\dot{x}$ образ x при каноническом отображении $X_0\to X_0|\widetilde{N}$ и определим $\dot{T}$ с помощью соотношения

$$\dot{T}\dot{x}=(\dot{T_0x}) \qquad (x\in X_0).$$

Тогда $\dot{T}$ удовлетворяет условиям 1) и 2), т. е. является эволюционным представлением алгебры $\mathfrak{A}$ в пространство $X_0|\widetilde{N}$.

3. Производящий оператор и его свойства. Одной из основных характеристик эволюционных представлений, как и полугрупп операторов, является производящий оператор. Для полугрупп-обобщенных функций он вводился в [10]. Фактически также он определяется и для эволюционного представления произвольной алгебры $\mathfrak{A}$.

Обозначим $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cap C^\infty(R_+)$, $\mathfrak{B}^+=\mathfrak{A}^+\cap C^\infty(R_+)$, и положим для удобства $(Tx)(f)=T(f)x$ $(x\in X;\ f\in\mathfrak{A})$.

Определение 3. Пусть $\mathscr{D}$ — множество тех x из X, для которых найдется такой $y_x \in X$, что $T'x\big|_{\mathfrak{B}^+} = Ty_x\big|_{\mathfrak{B}^+}$, где штрих означает обобщенное дифференцирование.

Тогда *производящим оператором* эволюционного представления T называется оператор, определяемый на $\mathscr{D}$ равенством

$$Ax = y_x.$$

Заметим, что это определение корректно. Действительно, пусть существует такой z_x, что $Ty_x\big|_{\mathfrak{B}^+} = Tz_x\big|_{\mathfrak{B}^+}$. Тогда для любого $f \in \mathfrak{B}^+$ имеем $T(f)(y_x - z_x) = 0$, и так как $\mathfrak{B}$ плотно в $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}^+$ плотно в $\mathfrak{A}^+$, следовательно, последнее равенство выполнено для всех $f \in \mathfrak{A}^+$, а в силу условия 2) получаем $y_x = z_x$.

Отметим теперь основные свойства производящего оператора.

1. A — замкнутый линейный оператор в X.

2. Область определения $\mathscr{D} = \mathscr{D}(A)$ всюду плотна.

В самом деле, если $z = T(g)x$ ($g \in \mathfrak{B}^+$; $x \in X$) и $f \in \mathfrak{B}^+$, то $T'(f)T(g)x = T(-f' * g)x = T(f)T'(g)x$, т. е. $T(g)x \in \mathscr{D}(A)$ и $AT(g)x = T'(g)x$, откуда следует, что $T(\mathfrak{B}^+)X \subset \mathscr{D}(A)$, и в силу того, что $\mathfrak{B}^+$ плотно в $\mathfrak{A}^+$, а $T(\mathfrak{A}^+)X$ всюду плотно, следует справедливость нашего утверждения.

В частности, мы получили следующее важное свойство.

3. $T'x\big|_{\mathfrak{B}^+} = ATx\big|_{\mathfrak{B}^+}$ $(x \in X)$.

Аналогично предыдущему доказывается следующее свойство.

4. $\mathscr{D}^\infty(A) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{D}(A^n)$ всюду плотно.

5. $$T(-f')x = AT(f)x + f(0)x \quad (f \in \mathfrak{B};\ x \in X), \tag{1}$$
$$T(-f')x = T(f)Ax + f(0)x \quad (f \in \mathfrak{B};\ x \in \mathscr{D}(A)). \tag{2}$$

Доказательство. Возьмем $g \in \mathfrak{B}^+$ и рассмотрим $f * g$. Из соотношения $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ следует, что $\operatorname{supp}(f * g) \subset R^+$.

Имеем

$$(f * g)'(t) = \left(\int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds\right)' = \int_0^t f'(t-s)\,g(s)\,ds + f(0)\,g(t) = (f' * g + f(0)\,g)(t) \tag{3}$$

и аналогично $(f * g)'(t) = (f * g')(t)$, откуда следует равенство

$$f * g' = f' * g + f(0)g. \qquad (4)$$

Применяя к этому равенству оператор Tx $(x \in X)$, получим

$$-T(f)T(-g')x = -T(-f')T(g)x + f(0)T(g)x$$

и, следовательно, по определению производящего оператора

$$-T(f)Ay = -T'(f)y + f(0)y \text{ и } -AT(f)y = -T'(f)y + f(0)y,$$

где $y = T(g)x$. Так как $T(\mathfrak{B}^+)X$ плотно в $\mathscr{D}(A)$ и A замкнут, то из этих равенств получаем (1) и (2).

4. Фундаментальные функции эволюционных операторов и корректность. Рассмотрим эволюционный оператор в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, \mathscr{L}(X))$

$$(\mathscr{P}_A F)(f) = F(-f') - AF(f) \quad (f \in \mathfrak{A};\ F \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, \mathscr{L}(X, \mathscr{D}(A)))).$$

Определение 4. *$\mathfrak{A}$-фундаментальной функцией* оператора $\mathscr{P}_A$ будем называть $T \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, \mathscr{L}(X))$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $T(f)A \subset AT(f)$ $(f \in \mathfrak{B})$;

2) $(\mathscr{P}_A T)(f) = f(0)$ $(f \in \mathfrak{B})$.

Из свойства 5 легко следует

Предложение 1. *Если A — производящий оператор эволюционного представления T алгебры $\mathfrak{A}$, то T является $\mathfrak{A}$-фундаментальной функцией оператора $\mathscr{P}_A$.*

Перейдем теперь к вопросу о единственности $\mathfrak{A}$-фундаментальной функции. Хорошо известно, что у оператора $\mathscr{P}_A$ в случае $X = R^n$ $\mathscr{K}_+$-фундаментальная функция единственна. Аналогичный факт имеет место и для $\mathfrak{A}$-фундаментального решения в локально выпуклом пространстве, но доказательство его более сложно. Для обоснования этого факта введем конструкцию свертки и понятие $\mathfrak{A}$-корректности, представляющие и самостоятельный интерес.

Пусть E — локально выпуклое пространство. Определим *свертку* функции $F \in L(\mathfrak{A}, E)$ с функцией $g \in \mathfrak{A}'$ следующим образом:

$$F * g : f \to (F_t \otimes g_{(s)}) (\tau_t f(s)) \quad (f \in \mathfrak{A}),$$

где τ_t — оператор сдвига $(\tau_t f(s) = f(s+t)$ $(t, \quad s \in R_+))$. Будем предполагать, что оператор свертки на g $(g \in \mathfrak{A}')$ непрерывно действует из $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$.

Легко показать, что $\operatorname{supp}(F * g) \subset \operatorname{supp} F + \operatorname{supp} g$ и $(F * g)' = F' * g = F * g'$, где штрих, как и раньше, означает обобщенное дифференцирование.

Эволюционный оператор можно «снизить» на пространство $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, X)$. Получим оператор $(P_A F)(f) = = F(-f') - AF(f)$ $(F \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, \mathscr{D}(A))$; $f \in \mathfrak{A})$.

Определение 5. Оператор P_A называется *корректным*, если $P_A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathfrak{A}, X))$. Будем в этом случае говорить, что оператор A корректен в смысле $\mathfrak{A}$ (или $\mathfrak{A}$-корректен).

Предложение 2. *Пусть A — замкнутый оператор в секвенциально полном локально выпуклом пространстве X. Если у оператора $\mathscr{P}_A$ существует $\mathfrak{A}$-фундаментальная функция, то оператор A корректен в смысле $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть T — фундаментальная функция. Рассмотрим оператор

$$U : \mathfrak{A}' \otimes X \ni \sum_{k=1}^{m} g_k \otimes x_k \to \sum_{k=1}^{m} T x_k * g_k \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, X).$$

Так как $\mathfrak{A}' \otimes X$ плотно в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, X)$ и U — линеен и непрерывен на $\mathfrak{A}' \otimes X$, то он может быть распространен на все $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, X)$; и это распространение будем обозначать той же буквой.

Пусть $F = \sum_{k=1}^{m} g_k \otimes x_k$ $(x_1, x_2, \ldots, x_m \in X)$. Тогда для $f \in \mathfrak{B}$ получим

$$(P_A U F)(f) = \left\langle f, P_A \left(\sum_{k=1}^{m} T x_k * g_k \right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle f, \sum_{k=1}^{m} (T' x_k - A T x_k) * g_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} g_k(f) x_k = F(f). \quad (5)$$

С другой стороны, пусть $G = \sum_{k=1}^{m} g_k \otimes y_k$ $(y_1, y_2, \ldots, y_m \in \in \mathscr{D}(A))$.

Тогда

$$(UP_A G)(f) = \left\langle f, U\left(\sum_{k=1}^{m} (g_k \otimes y_k - g_k \otimes Ay_k)\right)\right\rangle = \\ = \left\langle f, \sum_{k=1}^{m} (Ty_k * g_k' - TAy_k * g_k)\right\rangle = \left\langle f, \sum_{k=1}^{m} (T'y_k - \\ - TAy_k) * g_k\right\rangle = \sum_{k=1}^{m} g_k(f)\, y_k = G(f). \tag{6}$$

Так как $\mathfrak{B}$ плотно в $\mathfrak{A}$, имеем

$$P_A UF = F \quad (F \in \mathfrak{A}' \otimes X), \tag{7}$$

$$UP_A G = G \quad (G \in \mathfrak{A}' \otimes \mathscr{D}(A)), \tag{8}$$

и в силу того, что $\mathfrak{A}' \otimes E$ плотно в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ для любого секвенциально полного локально выпуклого пространства E, то равенства (7) и (8) выполнены соответственно для $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, X)$ и $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, \mathscr{D}(A))$ ($\mathscr{D}(A)$ снабжено топологией графика оператора A). Следовательно, существует $P_A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathfrak{A}, X))$ и $P_A^{-1} = U$.

Следствие. *Если у оператора $\mathscr{P}_A$ существует $\mathfrak{A}$-фундаментальная функция, то она единственна.*

Действительно, пусть T и S — фундаментальные функции оператора $\mathscr{P}_A$. Тогда $[\mathscr{P}_A(T - S)](f) = 0$ для любого $f \in \mathfrak{B}$. В силу плотности $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ имеем $\mathscr{P}_A(T - S) = 0$. Следовательно, $P_A(Tx - Sx) = 0$ для всех x из X. Применяя к последнему равенству оператор P_A^{-1}, получим $Tx = Sx$.

При некоторых дополнительных условиях на $\mathfrak{A}$ справедливо и утверждение, обратное предложению 2.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ борнологично и $\delta \in \mathfrak{A}'$. Тогда если оператор $\mathscr{P}_A$ $\mathfrak{A}$-корректен, то у него существует (единственная) $\mathfrak{A}$-фундаментальная функция.*

Доказательство. Положим $T(f)x = \langle f, P_A^{-1}(\delta \otimes \otimes x)\rangle$ $(f \in \mathfrak{A})$. Тогда условия 1), 2) определения 4, очевидно, выполнены. Ясно также, что $T(f) \in \mathscr{L}(X)$, так как если направленность x_α стремится к нулю, то $\delta \otimes x_\alpha \to 0$ и, следовательно, $T(f)x_\alpha \to 0$.

Остается доказать, что $T\in\mathscr{L}(\mathfrak{A}, \mathscr{L}(X))$. Пусть $\widetilde{\Phi}$ — совокупность абсолютно выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств пространства $\mathfrak{A}$, $\widetilde{M}$ — аналогичная совокупность подмножеств из X, $\widetilde{U}$ — определяющая совокупность окрестностей нуля в X; $\widetilde{U}=\{U=U_p=\{x\in\in X\,|\,p(x)\leqslant 1\}:p$ — непрерывная полунорма в $X\}$. Возьмем окрестность нуля $W_{M,U}=\{B\in\mathscr{L}(X):BM\subset U\}$ $(M\in\widetilde{M};\ U\in\widetilde{U})$ в $\mathscr{L}(X)$ и докажем, что

$$T^{-1}W_{M,U}=\{f\in\mathfrak{A}:T(f)M\subset U\}=\{f\in\mathfrak{A}:\max_{x\in M}p(T(f)x)\leqslant 1\}$$

— окрестность нуля в $\mathfrak{A}$. Так как $T^{-1}W_{M,U}$ абсолютно выпукло и $\mathfrak{A}$ — борнологично, то достаточно доказать, что оно поглощает любое множество из $\widetilde{\Phi}$. По условию $P_{\bar{A}}^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{L}\mathfrak{A},X))$, т. е. для любых $p\in\mathfrak{P}$, $\Phi\in\widetilde{\Phi}$ можно найти такие $q\in\mathfrak{B}$. $\Psi\in\widetilde{\Phi}$, что

$$\max_{f\in\Phi}p\left(\langle f,\,P_{\bar{A}}^{-1}F\rangle\right)\leqslant\max_{f\in\Psi}q\left(\langle f,\,F\rangle\right),$$

в частности, при $F=\delta\otimes x$ имеем

$$\max_{f\in\Phi}p(T(f)x)\leqslant q(x)\max_{f\in\Psi}|f(0)|,$$

т. е. существует такое $C>0$, что $p(T(f)x)\leqslant Cg(x)$, откуда следует неравенство

$$\max_{x\in M}p(T(f)x)\leqslant C_1(f\in\Phi),$$

следовательно, $T^{-1}W_{M,U}$ поглощает Φ, что и требовалось.

5. Связь фундаментальной функции с эволюционным представлением. Изучим условия, при которых фундаментальная функция эволюционного оператора является эволюционным представлением алгебры обобщенных функций.

Предложение 4. *Пусть выполнены условия предложения 2 и T — фундаментальная функция оператора $\mathscr{P}_A$. Пусть $T(\mathscr{K}^+)X$ всюду плотно в X. Тогда T является представлением алгебры $\mathfrak{A}$ в X.*

Доказательство. Рассмотрим $u(t)=Tx(g((\cdot)-t))$ $(t\in R_+;\ g\in\mathfrak{B}^+)$. Обозначим для краткости $T(g)x=y$ и заметим, что $y=u(0)$. Для $f\in\mathscr{K}_+$ имеем

$$(P_A u)(f)=u(-f')-Au(f)=-\int_0^\infty u(t)f'(t)\,dt-$$

$$-A\int_0^\infty u(t)\,f(t)\,dt=\int_0^\infty u'(t)\,f(t)\,dt-A\int_0^\infty u(t)\,f(t)\,dt+$$

$$+f(0)\,u(0)=\int_0^\infty (u'(t)-Au(t))\,f(t)\,dt+f(0)\,y=$$

$$=\int_0^\infty g(-t)\,f(t)\,dt+f(0)\,y=f(0)\,y,$$

откуда в силу предложения 2 следует, что

$$u(f)=T(f)\,y. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$u(f)=\int_0^\infty Tx\,(g(s-t))\,f(t)\,dt=Tx\left(\int_0^\infty g(s-t)\,f(t)\,dt\right)=$$

$$=T(f*g)\,x,$$

и, сравнивая с (9), получаем

$$T(f*g)\,x=T(f)\,T(g)\,x. \tag{10}$$

Так как $\mathscr{K}_+$ плотно в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}^+$ плотно в $\mathfrak{A}^+$, то равенство (10) выполнено для всех f из $\mathfrak{A}$ и g из $\mathfrak{A}^+$.

Возьмем произвольный $h\in\mathfrak{A}$. Тогда

$$\begin{gathered}T(h*f*g)\,x=T(h)\,T(f*g)\,x=T(h)\,T(f)\,T(g)\,x;\\ T(h*f*g)\,x=T(h*f)\,T(g)\,x\quad (x\in X),\end{gathered} \tag{11}$$

и так как $T(\mathscr{K}^+)X$ по условию всюду плотно, то отсюда следует операторное равенство $T(h*f)=T(h)\,T(f)$, т. е. T — представление алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве X.

Таким образом, чтобы установить взаимно однозначное соответствие между представлениями алгебры $\mathfrak{A}$ в X и $\mathfrak{A}$-фундаментальными функциями эволюционных операторов, остается показать, что $\mathfrak{A}$-фундаментальная функция удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 1. К сожалению, это не удается сделать без дополнительных, хотя и весьма слабых, предположений на алгебру $\mathfrak{A}$, или на пространство X, или же на сам оператор T. Одно такое предположение мы здесь приведем. Рассмотрим $x'Tx: f\to x'T(f)\,x$, где $x\in X$, $x'\in X'$. Очевидно, $x'Tx\in\mathfrak{A}'$. Рассматривая $x'Tx$ как скалярную обобщенную функцию, заметим, что она входит в класс так называемых обобщенных функций локально конечного порядка, т. е. таких, что для любого ограниченного интервала $[0, \beta)$ существует $m_\beta(x, x')$, для которого

$$x'Tx\,|_{[0,\beta)} \in \left(C_{[0,\beta)}^{0m_\beta(x,x')}\right)'.$$

Будем называть число

$$m(x, x') = \inf_{\beta>0} m_\beta(x, x')$$

порядком сингулярности в нуле обобщенной функции $x'Tx$.

Наше предположение заключается в следующих двух условиях:

1. Существует такое тотальное множество $Y' \subset X'$, что

$$m(x, Y') = \sup_{x'\in Y'} m(x, x') < +\infty; \qquad (12)$$

2. Существует такое тотальное множество $Y \subset X$ что

$$m(Y, x') = \sup_{x\in Y} m(x, x') < +\infty. \qquad (13)$$

Оператор $T \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, \mathscr{L}(X))$, удовлетворяющий этим условиям, будем называть *правильным*.

Предложение 5. *Пусть T — $\mathfrak{A}$-фундаментальная функция оператора $\mathscr{P}_A$, где A удовлетворяет условиям предложения 2. Тогда*

1) *Если выполнено условие* (12), *то выполнено условие 2 определения 1: из $Tx|_{\mathfrak{A}^+} = \{0\}$ следует $x = 0$.*

2) *Если выполнено условие* (13) *и область определения $\mathscr{D}(A)$ плотна в X, то выполнено условие 1 определения 1: $T(\mathfrak{A}^+)X$ всюду плотно в X.*

Доказательство. Пусть $Tx|_{\mathfrak{A}^+} = 0$. Тогда для любого x' из X' носитель $x'Tx$ сосредоточен в нуле и, следовательно, $x'Tx$ представляется в следующем виде:

$$x'Tx = \sum_{k=1}^{m(x,x')} a_{k,x,x'}\delta^{(k)},$$

откуда следует, что $x'T(\mathscr{K}_{m(x,Y')})x = 0$ $(x' \in Y')$, где $\mathscr{K}_{m(x,Y')}$—подпространство пространства $\mathscr{K}_+$, состоящее из функций, все производные которых до порядка

$m(x, Y')$ включительно обращаются в нуль в нуле. Следовательно, $x'T(\mathscr{H}_{m(x,Y')})x = 0$.

Возьмем теперь $f:t \to \nu(t)\,t^{m(x,Y')+1}$, где ν выберем следующим образом: $\nu \in \mathscr{K}_+$, $\nu' \in \mathscr{K}^+$, $\nu(0)=1$. Очевидно, что $f \in \mathscr{H}_{m(x,Y')}$. Так как Tx удовлетворяет уравнению $T'x = ATx + \delta \otimes x$, то

$$T\left(-\left(\nu(t)\,t^{m(x,Y')+1}\right)'\right)x = AT\left(\nu(t)\,t^{m(x,Y')+1}\right)x,$$

откуда следует, что

$$T\left(\nu(t)\,t^{m(x,Y')}\right)x = 0.$$

Тогда из соотношения

$$T\left(-\left(\nu(t)\,t^{m(x,Y')}\right)'\right)x = AT\left(\nu(t)\,t^{m(x,Y')}\right)x$$

получим, что

$$T\left(\nu(t)\,t^{m(x,Y')-1}\right)x = 0$$

и т. д. На шаге $m(x, Y')$ мы придем к равенству $T(\nu)x=0$. Тогда из равенства $T(-\nu')x = AT(\nu)x + \nu(0)x$, учитывая, что $T(-\nu')x=0$ и $\nu(0)=1$, получаем $x=0$, что и требовалось.

Перейдем от уравнения $T(-f')x = T(f)Ax + f(0)x$ ($x \in \mathscr{D}(A)$; $f \in \mathfrak{B}$) к сопряженному $T^*(-f')x' = A^*T^*(f)x' + f(0)x'$. Тогда по доказанному в первой части следует, что выполнено следующее: если $T^*(f)x'=0$ ($f \in \mathfrak{A}^+$), то $x'=0$. Так что из соотношения $x'T(f)x=0$ ($f \in \mathfrak{A}^+$) следует, что $x'=0$, т. е. $T(\mathfrak{A}^+)X$ всюду плотно в X.

Определение 6. Функцию $m: X \times X' \to N$ будем называть *допустимой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $m(B, B') < +\infty$ для любых ограниченных множеств $B \subset X$ и $B' \subset X'$,

2. Существуют такие тотальные множества $Y \subset X$ и $Y' \subset X'$, что $m(Y, x') < +\infty$ и $m(x, Y') < +\infty$ ($x' \in X'$; $x \in X$).

Это определение нам понадобится в дальнейшем.

6. Квазирезольвента и асимптотическая резольвента. Определение 7. Пусть Λ — подмножество комплексной плоскости. Функция $R: \Lambda \to \mathscr{L}(X)$, удовлетворяющая условиям 1) $AR(\lambda)\in\mathscr{L}(X)$; 2) $R(\lambda)A\subset AR(\lambda)$, называется *квазирезольвентой* оператора A.

Заметим, что если R — квазирезольвента оператора A, а оператор $B\in\mathscr{L}(X)$ перестановочен на $\mathscr{D}(A)$ с оператором A, то и BR — квазирезольвента оператора A.

Обозначим $A(\lambda)=\lambda I-A$ и $H(\lambda)=A(\lambda)R(\lambda)-I$. $\mathscr{L}(X)$-значная функция $H=H_{A,R}$ является «функцией дефекта» квазирезольвенты R. Так как у производящего оператора эволюционного представления бесконечно много квазирезольвент, то при помощи функции H можно будет выделять «истинные» квазирезольвенты, которые ближе всего к идеальной квазирезольвенте — резольвенте, хотя последняя, как уже отмечалось, может и не существовать.

Исходя из определения квазирезольвенты, нетрудно доказать следующий аналог хорошо известного тождества Гильберта для резольвент:

$$R(\lambda)-R(\mu)=\begin{vmatrix} R(\lambda) & \lambda R(\lambda)-H(\lambda) \\ R(\mu) & \mu R(\mu)-H(\mu) \end{vmatrix}$$

для любых $\lambda,\ \mu\in\Lambda$.

Из этого тождества, в частности, следует, что перестановочность операторов $R(\lambda)$ и $R(\mu)$ влечет перестановочность следующих пар: $R(\lambda)$ и $H(\mu)$, $R(\mu)$ и $H(\lambda)$, $H(\lambda)$ и $H(\mu)$, а также, что перестановочность первых двух пар операторов влечет перестановочность $R(\lambda)$ и $R(\mu)$. Нетрудно также доказать, что сильная аналитичность квазирезольвенты R в области Λ влечет сильную аналитичность функции H в этой области, и следующее соотношение между производными:

$$R'(\lambda)(I+H(\lambda))=-R^2(\lambda)+H'(\lambda)R(\lambda)\quad(\lambda\in\Lambda).$$

Заметим, что из условия 1 определения 7 вытекает включение $R(\lambda)X\subset D(A)$ $(\lambda\in\Lambda)$. Если аналогичное соотношение выполнено и для H, то квазирезольвенту R мы будем называть *биальной*. В этом случае, если обозначить через $X(R)$ линейную оболочку множества $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(R(\lambda)X\cup H(\lambda)X)$, то, очевидно, будем иметь включение $X(R)\subset D(A)$. С другой стороны, из равенства $x=\lambda R(\lambda)x-R(\lambda)Ax-H(\lambda)x$ $(x\in D(A))$ немедленно следует, что $D(A)\subset X(R)$.

Таким образом, если R — биальная квазирезольвента, то $X(R)=D(A)$.

Другой пример полезного условия на H доставляет следующее определение.

Определение 8. Квазирезольвента $R:\Lambda\to L(X)$ называется *асимптотической резольвентой* оператора A, если существует предельная точка λ_0 множества Λ, что $H_{A,R}(\lambda)x\to 0$ при $\lambda\to\lambda_0$ для любого x из X.

Важность этого понятия характеризуется следующими двумя простыми предложениями.

Предложение 6. *Если оператор A имеет асимптотическую резольвенту, то он допускает замыкание.*

Доказательство. Возьмем произвольную направленность $(x_\alpha)\subset D(A)$, $x_\alpha\to 0$, $Ax_\alpha\to y$. Тогда для любого λ из Λ имеем

$$R(\lambda)y=\lim_\alpha R(\lambda)Ax_\alpha=\lim_\alpha AR(\lambda)x_\alpha=0,$$

откуда следует, что $(I+H(\lambda))y=0$. Переходя в последнем соотношении к пределу при $\lambda\to\lambda_0$, получим $y=0$.

Предложение 7. *Соответствие $A\to(R,\ H)$, где R — биальная асимптотическая резольвента, а H — ее функция дефекта, инъективно.*

Доказательство. Пусть A, $B\to(R,\ H)$. Так как $D(A)=X(R)$ и $D(B)=X(R)$, то $D(A)=D(B)$. Возьмем произвольный x из $D(A)=D(B)$. Из очевидного соотношения $(I+H(\lambda)A(\lambda)x=B(\lambda)(I+H(\lambda))x$ следует

$$(I+H(\lambda))Ax=B(I+H(\lambda))x,$$

т. е.

$$BH(\lambda)x=Ax-Bx+H(\lambda)Ax.$$

Так как $H(\lambda)x\underset{\lambda\to\lambda_0}{\to}0$, $BH(\lambda)x=Ax-Bx+H(\lambda)Ax\underset{\lambda\to\lambda_0}{\to}$ $\to Ax-Bx$ и оператор B по предложению 6 предзамкнут, то $Ax-Bx=0$, т. е. $A\subset B$. Аналогично доказывается противоположное включение.

Замечание. Утверждение предложения 7 остается справедливым, если опустить условие биальности R, но ограничиться только замкнутыми операторами A.

Приведем три простых «модельных» примера асимптотической резольвенты.

(1) Пусть $C(\boldsymbol{R})$ — пространство непрерывных функций на числовой оси с топологией компактной сходимо-

сти, $A = \frac{d}{ds}$. Возьмем $c>0$ и положим

$$R(\lambda)\,x(s) = \int\limits_{s}^{s+c} e^{\lambda(s-v)}x(v)\,dv \quad (x \in C(\boldsymbol{R}),\ \lambda \in \Pi_0).$$

(2) Пусть $X = C^\infty(\boldsymbol{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси с топологией компактной сходимости всех производных, $c>0$. Тогда операторнозначная функция R, определенная равенством

$$R(\lambda)\,x(s) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(\int\limits_{s}^{s+c} e^{\sqrt{\lambda}(s-v)}x(v)\,dv + \int\limits_{s-c}^{s} e^{-\sqrt{\lambda}(s-v)}x(v)\,dv\right)$$

$$(x \in C^\infty(\boldsymbol{R}),\ \lambda \in \Pi_0),$$

является асимптотической резольвентой оператора $\frac{d^2}{ds^2}$.

(3) Нетрудно обнаружить, однако, что асимптотическая резольвента примера 2 не годится в случае пространства $C(\boldsymbol{R})$. Поэтому мы приведем несколько более сложный пример асимптотической резольвенты оператора $\frac{d^2}{ds^2}$ в этом пространстве:

$$R(\lambda)\,x(s) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(\int\limits_{s}^{s+c} e^{\sqrt{\lambda}(s-v)}(1-(s-v)^2\,x(v)\,dv + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{s-c}^{s} e^{-\sqrt{\lambda}(s-v)}(1-(s-v)^2)\,x(v)\,dv\right)$$

$$(x \in C(\boldsymbol{R}),\ \lambda \in \Pi_0).$$

В следующем пункте в теореме порождения эволюционных представлений мы будем рассматривать квазирезольвенту R, сильно аналитическую на $\Pi_0 = \{\lambda \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$, у которой функция дефекта H экспоненциально убывает на Π_0 при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$, т. е. существует такое $\varepsilon>0$, что для любой полунормы $q \in \mathfrak{P}_{L(X)}$ найдутся такие $m \in \mathcal{N}$ и $C>0$, что выполнено неравенство

$$q(H(\lambda)) \leqslant Ce^{-\varepsilon \operatorname{Re}\lambda}(1+|\lambda|)^m \quad (\lambda \in \Pi_0).$$

Заметим, что тогда

$$H(\lambda)\,x \underset{\lambda \to \lambda_0}{\longrightarrow} 0 \quad (x \in X)$$

для любого $\lambda_0 = +\infty + i\tau$ ($\tau \in R$), откуда, в частности, следует, что R — асимптотическая резольвента.

Квазирезольвенту, обладающую всеми этими добродетелями, мы, не обременяя эпитетами, будем называть в п. 7 и 8 просто квазирезольвентой.

7. Порождение эволюционных представлений алгебры $\mathscr{K}_+$. Будем говорить, что *оператор A порождает эволюционное представление T алгебры $\mathscr{K}_+$ ($\mathscr{K}_+$-представление) в X*, если A — производящий оператор представления T.

Пусть X — борнологическое секвенциально полное локально выпуклое пространство, $\Pi_0 = \{\lambda \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$.

Теорема 1. *Для того чтобы замкнутый линейный оператор $A: X \to X$ со всюду плотной областью определения порождал правильное $\mathscr{K}_+$-представление в X, необходимо и достаточно, чтобы существовала квазирезольвента R оператора A, для которой найдется такая допустимая функция $m: X \times X' \to N$, что числовые множества $M_{x,x'} = \{(1 + |\lambda|)^{-m(x,x')} x'R(\lambda)x \mid \lambda \in \Pi_0\}$ ($x \in X$, $x' \in X'$) ограничены.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A порождает $\mathscr{K}_+$-представление T. Возьмем функцию μ из $\mathscr{K}_+$ с носителем, содержащемся в $[0, 2\alpha]$ ($\alpha > 0$) и равную единице на $[0, \alpha]$, и положим $R(\lambda) = (\mu T)(e^{-\lambda(\cdot)}) = T(\mu e^{-\lambda(\cdot)})$. Так как T является $\mathscr{K}_+$-фундаментальной функцией оператора $\mathscr{P}_A$, то она удовлетворяет соотношениям $T(-f') = AT(f) + f(0)T$, $T(f)A \subset AT(f)$. Подставляя $f = \mu e^{-\lambda(\cdot)}$, получаем $(\lambda I - A)\ R(\lambda) = T + T(\mu' e^{-\lambda(\cdot)})$, $R(\lambda)A \subset AR(\lambda)$. Обозначим $H(\lambda) = (\mu' T)(e^{-\lambda(\cdot)})$ и рассмотрим функции $x'R(\lambda)x$ и $x'H(\lambda)x$ ($x \in X$; $x' \in X'$; $\lambda \in \Pi_0$). По теореме Пэли — Винера имеем оценки

$$\sup_{x \in B, x' \in B'} |x'H(\lambda)x| \leqslant C' e^{-\alpha \operatorname{Re}\lambda} (1 + |\lambda|)^{m'(x,x')} \quad (\lambda \in \Pi_0),$$

$$\sup_{x \in B, x' \in B'} |x'R(\lambda)x| \leqslant C (1 + |\lambda|)^{m(x,x')} \quad (\lambda \in \Pi_0),$$

откуда следует, что R — квазирезольвента и выполнено условие 1 определения 6.

Условие 2 определения 6 следует из предположения о правильности представления T.

Достаточность. Возьмем φ из $\mathscr{K}_+$ с носителем, содержащимся в $[0, \alpha]$, и положим

$$T(\varphi)\,x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_\sigma} \tilde{\tilde{\varphi}}(\lambda)\,R(\lambda)\,x\,d\lambda \quad (x \in X), \tag{14}$$

где

$$\bar{\varphi} \in \mathscr{K}, \qquad \bar{\varphi}\big|_{R+} = \varphi,\ \tilde{\tilde{\varphi}}(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda t}\bar{\varphi}(t)\,dt,$$

$$\Pi_\sigma = \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > \sigma\},\ \sigma > 0.$$

В силу известной оценки Пэли — Винера для φ и секвенциальной полноты пространства X интеграл в (14) существует. Этот интеграл не зависит от выбора продолжения $\bar{\varphi}$ функции φ и положительного числа σ, так что $T(\varphi)x$ определено корректно. Очевидно, $T \in \mathscr{L}(\mathscr{K}_{[0,\alpha]}, \mathscr{L}(X))$, где через $\mathscr{K}_{[0,\alpha]}$ обозначено подпространство функций из $\mathscr{K}_+$ с носителями в $[0, \alpha]$.

Имеем

$$T'(\varphi)\,x = T(-\varphi')\,x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_\sigma} \lambda\tilde{\tilde{\varphi}}(\lambda)\,R(\lambda)\,x\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_\sigma} \tilde{\tilde{\varphi}}(\lambda)\,AR(\lambda)\,x + \frac{1}{2\pi i}\,x\int\limits_{\partial\Pi_\sigma} \tilde{\tilde{\varphi}}(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_\sigma} \tilde{\tilde{\varphi}}(\lambda)\,H(\lambda)\,x\,d\lambda = AT(\varphi)\,x + \varphi(0)\,x, \tag{15}$$

и аналогично

$$T'(\varphi)x = T(\varphi)Ax + \varphi(0)x \quad (x \in \mathscr{D}(A)). \tag{16}$$

Пусть теперь $f \in \mathscr{K}_{[0,2\alpha]}$ и $f(0) = 0$. Возьмем φ из $\mathscr{K}_{[0,\alpha]}$ такую, что 1) носитель φ совпадает с $[0, \alpha]$, 2) $\varphi(0) = 1$, 3) $\varphi^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Будем искать решение g уравнения

$$\varphi * g = f. \tag{17}$$

Дифференцируя, имеем $\varphi' * g + g = f'$. Это уравнение Вольтерра второго рода. Хорошо известно, что оно имеет единственное непрерывное решение, которое, очевидно, удовлетворяет уравнению (17). В силу соотношения

$$g = f' - \varphi' * g$$

и бесконечной дифференцируемости функций f и φ следует, что g бесконечно дифференцируема.

Докажем, что носитель g содержится в $[0, \alpha]$. Для этого воспользуемся теоремой Лионса о носителях [2]:

$$\mathrm{co\,supp}(\varphi * g) = \mathrm{co\,supp}\,\varphi + \mathrm{co\,supp}\,g, \tag{18}$$

где через co обозначена замкнутая выпуклая оболочка. Так как $\mathrm{supp}\,\varphi = [0, \alpha]$ и $\mathrm{co\,supp}(\varphi * g) = \mathrm{co\,supp}\,f \subset [0, 2\alpha]$, то из (18) следует, что $\mathrm{supp}\,g \subset [0, \alpha]$. Таким образом, $g \in \mathscr{K}_{[0, \alpha]}$.

Мы доказали, что для любой функции f из $\mathscr{K}_{[0, 2\alpha]}$ такой, что $f(0) = 0$, существуют φ, $g \in \mathscr{K}_{[0, \alpha]}$, удовлетворяющие уравнению $f = \varphi * g$. Распространим T на такие функции f, положив $T(f) = T(\varphi) \cdot T(g)$, и докажем, что $T(f)$ удовлетворяет равенствам (15) и (16):

$$\begin{aligned} T'(f) &= T(-\varphi' * g) - \varphi(0)T(g) = T'(\varphi)T(g) - \varphi(0)T(g) = \\ &= AT(\varphi)T(g) + \varphi(0)T(g) - \varphi(0)T(g) = AT(f). \end{aligned} \tag{19}$$

Аналогично доказывается соотношение

$$T'(f)x = T(f)Ax \, (x \in \mathscr{D}(A)). \tag{20}$$

Легко показать, что для любой функции f из $\mathscr{K}_+$ такой, что $f(0) = 0$, применяя изложенные выше построения, получим те же соотношения (19) и (20).

Пусть теперь $h \in \mathscr{K}_+$ и $h(0) \neq 0$. Возьмем $\psi \in \mathscr{K}_{[0, \alpha]}$ такую, что $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = h'(0)[h(0)]^{-1}$. Тогда h можно представить в виде

$$h = h(0)\psi + (h - h(0)\psi). \tag{21}$$

Ясно, что функция $f = h - h(0)\psi$ обращается в нуле в нуль. Дифференцируя, имеем $h' = h(0)\psi' + (h' - h(0)\psi')$. Заметим, что $f'(0) = h'(0) - h(0)\psi'(0) = 0$. Положим $T(h) = h(0)T(\psi) + T(f)$ и проверим выполнение равенств (15) и (16):

$$\begin{aligned} T'(h) &= T(-h') = -h(0)T(\psi') + T(-f') = h(0)AT(\psi) + \\ &+ h(0)I + AT(f) = AT(h) + h(0). \end{aligned} \tag{22}$$

Аналогично доказывается равенство

$$T'(h)x = T(h)Ax + h(0)I \quad (x \in \mathscr{D}(A)). \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что T является $\mathscr{K}_+$-фундаментальной функцией оператора $\mathscr{P}_A$.

Покажем, что оператор T правильный. Для этого рассмотрим сужение $T_\alpha = T|_{\mathscr{K}_{[0,\alpha]}}$. По построению

$$(x'T_\alpha x)(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi_\sigma} \tilde{\varphi}(\lambda)x'R(\lambda)\,xd\lambda \quad (\varphi \in \mathscr{K}_{[0,\alpha]},$$
$$x' \in X',\, x \in X). \tag{24}$$

Так как

$$\sup_{x\in Y}|x'R(\lambda)\,x| \leqslant C(1+|\lambda|)^{m(Y,x')},\ (\lambda \in \Pi_0),$$

то из (24) следует, что

$$\sup_{x\in Y}|(x'T_\alpha x)(\varphi)| \leqslant C \sup_{\substack{t\in[0,\alpha]\\ l\leqslant m(Y,x')}} |\varphi^{(l)}(t)|,$$

т. е. обобщенная функция $x'T_\alpha x$ может быть распространена на $C_{[0,\alpha]}^{m(Y,x')}$. Совершенно аналогично доказывается, что она распространяется на $C_{[0,\alpha]}^{m(x,Y')}$. Таким образом, T — правильная $\mathscr{K}_+$-фундаментальная функция, следовательно, в силу предложений 4 и 5 получаем, что T является $\mathscr{K}_+$-представлением в X.

8. Теоремы порождения полугрупп операторов и L_+-представлений. В этом пункте мы покажем как применять теорему 1 для порождения полугрупп операторов и эволюционных представлений. Чтобы не загромождать изложения техническими деталями, ограничимся рассмотрением двух самых простых и вместе с тем важных примеров: непрерывной полугруппы эндоморфизмов и эволюционного представления алгебры L_+ (L_+-представления).

Напомним, что непрерывной полугруппой эндоморфизмов пространства X называется непрерывный гомоморфизм с единицей аддитивной полугруппы $\boldsymbol{R}_+$ в мультипликативную полугруппу $\mathscr{L}_s(X)$ эндоморфизмов пространства X, снабженную топологией поточечной сходимости.

Пусть $A: X \to X$ — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения.

Теорема 2. *Оператор A порождает непрерывную полугруппу эндоморфизмов пространства X тогда и только тогда, когда существует такая квазирезольвента R оператора A, что семейство операторов*

$$\left\{\frac{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}}{n!} R^{(n)}(\lambda) \mid \lambda \in \Pi_0,\ n \in \mathcal{N}\right\}$$

равностепенно непрерывно.

Доказательство. Необходимость тривиально следует из бочечности пространства X и оценки

$$\left|\sigma^{n+1} x' R^{(n)}(\lambda) x\right| = \left|\sigma^{n+1} x' T\left(\mu(t) t^n e^{-\lambda t}\right) x\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in [0,\alpha]} |\mu(t) x' T(t) x| \int_0^\alpha \sigma^{n+1} t^n e^{-\sigma t} dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{const} \int_0^\infty \theta^n e^{-\theta} d\theta = \operatorname{const} \cdot n! \quad (x \in X;\ x' \in X'),$$

где $\alpha = \max \operatorname{supp} \mu$, $\sigma = \operatorname{Re}\lambda$.

Достаточность. В силу теоремы 1 оператор A порождает $\mathcal{K}_+$-представление T. Для $\varphi \in \mathcal{K}_{[0,\alpha)}$ имеем

$$T(\varphi) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi_6} \tilde{\varphi}(\lambda) R(\lambda) x d\lambda \quad (x \in X;\ \Pi = \partial\Pi_6 =$$

$$= \{\lambda \in C \mid \operatorname{Re}\lambda > \partial\Pi_6\};\ \partial\Pi_6 > 0). \tag{25}$$

Возьмем x из $X_0 = T(\mathcal{K}^+) X$. В силу определения квазирезольвенты имеем равенство $\lambda R(\lambda) = R(\lambda) A x + x + H(\lambda) x$, из которого следует соотношение

$$\lambda^2 R(\lambda) x = \lambda x + A x + R(\lambda) A^2 x + H(\lambda) [\lambda I + A] x.$$

Подставляя это соотношение в (25), получим

$$T(\varphi) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi_0} \tilde{\varphi}(\lambda) \lambda^{-2} R(\lambda) A^2 x d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi_6} e^{+\lambda t} \lambda^{-2} R(\lambda) A^2 x d\lambda.$$

Так как условие теоремы влечет равностепенную непрерывность семейства $\{R(\lambda) \mid \lambda \in \Pi\partial\Pi_6\}$, а пространство X секвенциально полно, то последний интеграл существует, непрерывен по t и оценивается сверху функцией const $e\partial\Pi_6$. Тогда, применяя процесс обращения Поста — Уиддера ([1], с. 241), получим равенство

$$T(\varphi) x = \int_0^\infty \varphi(t) \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \left(\lambda^{-2} R(\lambda)\right)^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) dt, \tag{26}$$

из которого следует оценка

$$|x'T(\varphi)x| \leqslant \mathrm{const} \int_0^\infty |\varphi(t)| \cdot t^2 dt. \tag{27}$$

Возьмем теперь $0<\beta<\alpha$ и для любого $t\in(0, \beta]$ рассмотрим последовательность регуляризации $(\varphi_{t,n})$, сходящуюся к δ_t. Из оценки (27), плотности X_0 и бочечности пространства следует, что семейство операторов $\{T(\varphi_{t,n}) \mid t\in(0, \beta];\ n\in\mathcal{N}\}$ равностепенно непрерывно. Следовательно, существуют $T(\delta_t)\in\mathcal{L}(X)$ для всех $t\in(0, \beta]$ и семейство $\{T(\delta_t) \mid t\in(0, \beta]\}$ также равностепенно непрерывно.

Остается заметить, что для любого x из X_0 функция $\boldsymbol{R}_+\ni t\to T(\delta_t)x\in X$ непрерывна, чтобы заключить, что отображение $t\to T(\delta_t)$ сильно непрерывно на $[0, \beta]$.

С другой стороны, переходя в равенстве

$$T(\varphi*\psi)=T(\varphi)T(\psi) \quad (\varphi, \psi\in\mathcal{K}_{[0, \alpha/2]})$$

к пределу при $\varphi\to\delta_t$ и $\psi\to\delta_s$, получаем полугрупповое свойство $T(\delta_{t+s})=T(\delta_t)T(\delta_s)$ по крайней мере на $[0, \beta/2]$. Отметим также, что $T(\delta_0)=I$.

Распространим $T(\delta_t)$ на всю полуось $\boldsymbol{R}_+$, положив для $t\in\boldsymbol{R}_+$, $t=l\cdot\beta/2+r$ $(0\leqslant r<\beta/2)$

$$T(\delta_t)=[T(\delta_{\beta/2})]^l\cdot T(\delta_r).$$

Получили сильно непрерывную полугруппу $\{T(\delta_t) \mid t\in\boldsymbol{R}_+\}$ эндоморфизмов пространства X, производящий оператор которой, как нетрудно проверить, совпадает с A.

Теорема 3. *Оператор A порождает L_+-представление в том и только в том случае, если для всех $\lambda\in\Pi_0$ существует резольвента $R(\lambda)$ оператора A и семейство операторов*

$$\{(\mathrm{Re}\,\lambda R(\lambda))^n \mid \lambda\in\Pi_0,\ n\in\mathcal{N}\} \tag{28}$$

равностепенно непрерывно.

Доказательство. Пусть T — эволюционное представление алгебры L_+. Учитывая, что характеры $e^{-\lambda(\cdot)}$ $(\lambda\in\Pi_0)$ полугруппы $\boldsymbol{R}_+$ содержатся в L_+, возьмем в качестве функции μ тождественную единицу, т. е. положим $R(\lambda)=T(e^{-\lambda(\cdot)})$. Тогда $H(\lambda)\equiv 0$ и, следовательно, $R(\lambda)$ — резольвента оператора A. В силу тождества Гильберта имеем

$$R^n(\lambda)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}R^{(n-1)}(\lambda)=\frac{1}{(n-1)!}T\left(t^{n-1}e^{-\lambda t}\right).$$

Тогда в силу бочечности пространства и оценки

$$|x'[\sigma\cdot R(\lambda)]^n x|=\frac{\sigma^n}{(n-1)!}\left|x'T\left(t^{n-1}e^{-\lambda t}\right)x\right|\leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\cdot\frac{\sigma^n}{(n-1)!}\left\|t^{n-1}e^{-\lambda t}\right\|_{L_+}=\text{const}$$

$$(x\in X;\ x'\in X';\ \sigma=\operatorname{Re}\lambda)$$

получаем необходимость условия теоремы.

Достаточность. Снова как и в теореме 2 оператор A порождает $\mathscr{K}_+$-представление T. Но теперь уже для любого φ из $\mathscr{K}^+$ имеет место соотношение (25). Рассуждая совершенно аналогично как при доказательстве теоремы 2, получим, что $T(\delta_t)\in\mathscr{L}(X)$, семейство операторов $\{T(\delta_t)\,|\,t\in\boldsymbol{R}^+\}$ равностепенно непрерывно, и отображение $t\to T(\delta_t)$ сильно непрерывно на $\boldsymbol{R}_+$. Тогда из бочечности пространства и оценки

$$|x'T(\varphi)x|=\left|\int_0^\infty\varphi(t)\,x'T(\delta_t)\,x\,dt\right|\leqslant\text{const}\int_0^\infty|\varphi(t)|\,dt$$

$$(x\in X;\ x'\in X';\ \varphi\in\mathscr{K}_+),$$

вытекает, что семейство $\{T(\varphi)\,|\,\varphi\in B\cap\mathscr{K}_+\}$ (B — единичный шар в пространстве L_+) равностепенно непрерывно. Так как $\mathscr{K}_+$ плотно в L_+, то отсюда сразу же следует, что для любого $f\in L_+$ существует $T(f)\in\mathscr{L}(X)$ и семейство $\{T(f)\,|\,f\in B\}$ равностепенно непрерывно.

Докажем, что построенное отображение $T:L_+\to\mathscr{L}(X)$ непрерывно в нуле, т. е. для любой окрестности $W=\{S\in\mathscr{L}(X)\,|\,SE\subset V\}$ (E — ограниченное множество в X, V — окрестность нуля в пространстве X) найдется такое $\rho>0$, что $T(\rho B)\subset W$. Последнее соотношение равносильно, очевидно, следующему

$$T(\rho B)E\subset V. \tag{29}$$

Равностепенная непрерывность множества $\{T(f)\,|\,f\in B\}$ означает, что для V найдется такая абсолютно выпуклая окрестность нуля U, что $T(B)U\subset V$. С другой стороны, существует такое $\rho>0$, что $E\subset\rho U$. Из этих двух соотношений и билинейности отображения $L_+\times X\ni(f,x)\to T(f)x\in X$ следует (29).

Таким образом, $T\in\mathscr{L}(L_+,\mathscr{L}(X))$.

Переходя же в равенстве $T(\varphi*\psi)=T(\varphi)T(\psi)$ $(\varphi, \psi\in\in\mathscr{K}_+)$ к пределу при $\varphi\to f$ и $\psi\to g(f, g\in L_+)$, получаем $T(f*g)=T(f)T(g)$, и замечая, что условия 1) и 2) определения 2, очевидно, выполнены, заключаем, что T — эволюционное представление алгебры L_+.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функционльный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962. 829 с.
2. **Иосида К.** Функциональный анализ. М., «Мир», 1967. 624 с.
3. **Крейн С. Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967. 464 с.
4. **Lions J. L.** Les semi-groupes distributions.—„Portugal Math.“, 1960, v. 19, p. 141—164.
5. **Lions J. L.** Supports dans la transformation de Laplace.—„J. Anal. Math.“, 1952/53, v. 2, p. 369—380.
6. **Chazarain J.** Problemes de Cauchy au sens des distributions vectorilles et applications.—„C. R. Acad. Sci. Paris“, 1968, v. 266, p. 10—13.
7. **Chazarain J.** Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes.—„J. Funct. Analysis“, 1971, v. 7, N 3, p. 386—446.
8. **Ushijima T.** Some properties of regular distribution semigroups.— „Proc. Japan Acad.“ 1969, v. 45, p. 224—227.
9. **Лаптев Г. И.** Операторное исчисление линейных неограниченных операторов и полугруппы.— «Функциональный анализ и его приложения», 1970, т. 4, № 4, с. 31—40.
10. **Вувуникян Ю. М.** Порождение полугрупп-обобщенных функций эндоморфизмов локально выпуклого пространства.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 2, с. 269—272.
11. **Вувуникян Ю. М.** $\Gamma\{m_k\}$-полугруппы эндоморфизмов локально выпуклых пространств.— «Тр. НИИ матем. Воронежск. ун-та», 1971, вып. 3, с. 11—18.
12. **Вувуникян Ю. М.** Критерии гладкости и аналитичности полугруппы-обобщенной функции в локально выпуклом пространстве.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 203, № 2, с. 270—273.
13. **Вувуникян Ю. М.** Порождение квазиэкспоненциальных полугрупп-обобщенных функций.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 209, № 1, с. 19—21.
14. **Вайнерман В. И., Вувуникян Ю. М.** Фундаментальные функции дифференциальных операторов в локально выпуклом пространстве.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, № 1, с. 15—18.
15. **Вувуникян Ю. М.** Эволюционные представления алгебр S_α.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 215, № 5, с. 1035—1037.
16. **Вувуникян Ю. М.** Эволюционные представления алгебры суммируемых функций в локально выпуклом пространстве.— «Докл. АН СССР», 1974, № 4, с. 724—727.
17. **Вувуникян Ю. М., Иванов В. В.** Порождение эволюционных представлений и метод резольвентной последовательности.— «Сиб. мат. ж.», 1974, т. 15, № 6, с. 1422—1424.

ПОЛУГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Иванов

В этой работе речь пойдет о том, как можно изучать полугруппы линейных операторов в локально выпуклых пространствах, не ограничивая себя какими-либо условиями на рост полугруппы в бесконечности.

В банаховом случае полугруппа растет не быстрее экспоненты, что позволяет широко использовать технику преобразования Лапласа. Решающим здесь является то обстоятельство, что преобразование Лапласа полугруппы есть резольвента ее производящего оператора. Таким образом, изучив взаимосвязь свойств полугруппы и ее преобразования Лапласа, мы получаем возможность решить основной вопрос теории полугрупп операторов — выяснить (необходимые и достаточные) условия, при которых линейный оператор порождает полугруппу данного класса, т. е. в силу отмеченного обстоятельства мы имеем естественный язык, на котором эти условия могут формулироваться,— это резольвента оператора.

Все было бы прекрасно и в локально выпуклом пространстве, если бы и в этом случае существовала резольвента. К сожалению, уже простейшие примеры полугрупп показывают, что эта ситуация далеко не типична в ненормируемом пространстве — производящий оператор полугруппы в таком пространстве может не иметь резольвенты ни в одной точке. Иными словами, резольвента не может использоваться в случае локально выпуклого пространства ни как *метод* исследования, ни как *язык* для выражения результатов теории.

Можно, разумеется, наложить на полугруппу и в ненормируемом случае условия, обеспечивающие существование резольвенты ее производящего оператора. По существу наиболее общим условием такого рода является равностепенная непрерывность полугруппы. Теория таких полугрупп была развита в работах Л. Шварца и К. Иосида [6].

Возможен, однако, и другой подход: вместо того, чтобы выяснять дополнительные условия на полугруппы, при которых применим классический резольвентный аппарат (=требовать от полугрупп *в локально выпуклом пространстве* то, что им, как правило, не присуще), попытаться построить иной аппарат исследования, более приемлемый для общих локально выпуклых пространств. При этом новый аппарат должен быть не менее гибким, чем метод резольвенты, а в ситуациях, где последний оказывается применимым, должен просто к нему сводиться.

Теперь о вопросах, возникающих при рассмотрении общих полугрупп в локально выпуклых пространствах.

1) Прежде всего исследовать полугруппы, которые изучаются в классической теории (это главным образом относится к вопросам порождения).

2) Выяснить наиболее важные моменты в общей схеме порождения и на этом пути установить пределы применимости нового (а тем самым и старого) аппарата. Точнее говоря, найти наиболее широкий класс полугрупп, производящие операторы которых допускают характеристику в терминах данного языка, и получить эту характеристику. С другой стороны, более тонкий метод допускает более подробную классификацию полугрупп, в связи с чем также возникает ряд вопросов.

3) Следует отметить и такой (на мой взгляд важный) момент. Часто вполне определенному вопросу для полугрупп в банаховской теории соответствует целый спектр вопросов в случае локально выпуклого пространства. Это объясняется, с одной стороны, широтой перечня возможных свойств локально выпуклого пространства (имеющих отношение к рассматриваемым вопросам), с другой — возможностью рассматривать целую шкалу топологий в сопряженном пространстве, согласующихся с двойственностью (например, при исследовании сопряженных полугрупп). Последнее возможно, конечно, и для нормированных пространств, однако если мы хотим оставаться в рамках *нормированной* теории (или теории равностепенно непрерывных полугрупп в локально выпуклых пространствах), то мы должны ограничиться лишь сильной топологией в пространстве функционалов.

Таким образом, наша задача заключается в том, чтобы попытаться построить аппарат для исследования полугрупп линейных операторов в локально выпуклых пространствах, позволяющий развивать теорию, удовлетворяющую, по крайней мере, указанным выше положениям. Краткому изложению некоторых результатов такой попытки и посвящена данная работа.

Несколько слов об идее предлагаемого метода. Как было сказано, резольвента производящего оператора (если таковая существует) есть, по существу, преобразование Лапласа полугруппы. Естественно поэтому, что для порождения полугрупп используется обратное преобразование Лапласа от резольвенты. Понятно, однако, что полугруппу (=детерминированный процесс) достаточно восстановить лишь в некоторой окрестности начала. А для этого вовсе не обязательно иметь информацию о всей полугруппе (как в случае резольвенты). Так, если мы имеем полугруппу T[1], то на отрезке $[0, 1]$ она может быть восстановлена по преобразованию Лапласа R от $\chi_{[0,1]}T$. Это первый момент.

Конечно, мы определили отображение R, уже имея полугруппу. Посмотрим же на него с точки зрения оператора A — производящего оператора полугруппы T. Учитывая, что $T'=AT$, получаем соотношение

$$(\lambda I-A)R(\lambda)=I-e^{-\lambda}T(1).$$

Это второй момент.

В этом соотношении снова участвует исходная полугруппа T, однако ее роль здесь (точнее роль оператора $T(1)$) уже довольно незначительна, и вот в каком смысле. Если взять еще одно отображение, положим $\overline{R}$, перестановочное с A и удовлетворяющее соотношению

$$(\lambda I-A)\overline{R}(\lambda)=I-e^{-\lambda}\nu, \qquad (*)$$

где ν — некоторый эндоморфизм, то

$$R(\lambda)-\overline{R}(\lambda)=e^{-\lambda}(R(\lambda)\nu-T(1)\overline{R}(\lambda)).$$

Следовательно, если отображение $\overline{R}$ (как и R) ограничено в полуплоскости $\{\operatorname{Re}\lambda>0\}$, то обратные преобразования Лапласа от $\overline{R}$ и R совпадают[2], т. е. полугруппа T

[1] Пусть для простоты T непрерывна в нуле.

[2] На плотном множестве $D(A^2)$.

может быть получена и с помощью $\overline{R}$. Это третий момент.

По существу соотношение (*) и положено в основу понятия квазирезольвенты — центрального понятия предлагаемого аппарата. Изложению основных положений метода квазирезольвенты посвящен § 1. В § 2 излагается общая схема порождения полугрупп линейных операторов в локально выпуклых пространствах на основе аппарата, разработанного в предыдущем параграфе. § 3 посвящен исследованию (производящих операторов) различных классов полугрупп. Наконец, в § 4 на примере сопряженных полугрупп мне хотелось показать, каким образом аппарат квазирезольвенты используется как метод исследования в тех ситуациях, где он не используется как язык при формулировке результатов.

Основы излагаемого подхода заложены в работах автора [1—4], более полное (и систематическое) изложение можно найти в работе, содержание которой отражено в [5].

§ 1. Квазирезольвента

Прежде чем приступить к построению аппарата, несколько слов о принятых в работе обозначениях.

Всюду X означает отделимое секвенциально полное локально выпуклое пространство, $\mathfrak{P}$ — семейство полунорм, задающее топологию в X, X' — сопряженное к X пространство, $\mathscr{L}(X, Y)$ (соответственно $L(X, Y)$) — пространство линейных операторов из X (соответственно непрерывных и определенных на X) в Y. В случае $X=Y$ пишется $\mathscr{L}(X)$ и $L(X)$. Через I (или I_X) обозначается тождественный оператор в X.

Множество $X_0 \subset X$ называется *секвенциально плотным* (в X), если, производя над X_0 операцию секвенциального замыкания (т. е. присоединения к X_0 пределов всевозможных последовательностей из X_0) конечное число раз, исчерпаем все X.

Будем говорить, что отображение $U: \Xi \times X \to Y$ *сильно обладает свойством* P (в Ξ) на $X_0 \subset X$, если для всякого $x \in X_0$ отображение $U(\cdot, x)$ обладает свойством P. Запись $S_\alpha \to S$ означает сильную сходимость семейства операторов $\{S_\alpha\}$ к S на X.

Как обычно, $D(A)$ $(R(A))$ — область определения (значений) оператора A, $N(A)$ — ядро A, $A|X_0$ — сужение A на X_0.

Через $\mathscr{L}(E_\alpha, \alpha\in\mathfrak{A})$ обозначается линейная оболочка множества $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} E_\alpha$.

Всюду $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{N}$ — комплексные, вещественные и натуральные числа соответственно. Приняты также обозначения

$$\Pi_\sigma = \{\lambda \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > \sigma\},\ \boldsymbol{R}^+ = (0, \infty),$$
$$\boldsymbol{R}_+ = [0, \infty),\ \overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} \cup \{0\}.$$

Знак $\equiv$ заменяет слова «по определению» и т. д.

1.1. *Квазиобратные операторы*

1.1.1. Определение. Пусть $A\in\mathscr{L}(X)$. Оператор $A^-\in L(X)$ называется *квазиобратным* к A, если а) $A^-A\subset\subset AA^-$; б) $AA^-\in L(X)$. Оператор $\nu(A, A^-)=AA^- - I$ называется *остатком* A^- (относительно A). Множество всех квазиобратных к A операторов обозначается через $Q(A)$.

Отметим некоторые простейшие свойства квазиобратных операторов.

1.1.2. Непосредственно из определения следует перестановочность операторов A и A^- с остатком $\nu(A, A^-)$. Далее, если A допускает замыкание $\bar{A}$, то, очевидно, $Q(A)\subset Q(\bar{A})$ и $\nu(A, \cdot)\subset\nu(\bar{A}, \cdot)$.

1.1.3. Предложение. *Пусть $\overline{A|Y}=\bar{A}$ для некоторого плотного в X подпространства Y, и эндоморфизм $U\in L(X)$ таков, что $UA|Y\subset\bar{A}U|Y\in L(Y, X)$, причем оператор $\bar{A}U|Y$ распространяется до эндоморфизма X. Тогда $U\in Q(\bar{A})$.*

Действительно, в силу плотности Y и непрерывности U, $\overline{R(U)}\subset D(\bar{A})$ и $\bar{A}U\in L(X)$; при этом $U\bar{A}=U\overline{A|Y}\subset\subset\overline{UA|Y}\subset\overline{\bar{A}U|Y}=\bar{A}U$.

1.1.4. Отметим, что $Q(A)$ есть подалгебра $L(X)$, причем

$$A^{m-k}Q(A)^m\subset L(X, D(A^k)),\ k\leqslant m,$$

где $D(A^k)$ снабжено топологией графика, определяемой семейством полунорм $p^k \equiv \sum_{i=0}^{k} p \circ A^i$, $p \in \mathfrak{P}$.

1.1.5. Предложение. *Пусть* $A^- \in Q(A)$ *и* $B^- \in Q(B)$. *Если* $D(B) \subset D(A)$, *то*

$$A^-(I+\nu(B, B^-)) - (I+\nu(A, A^-))B^- = A^-(B-A)B^-.$$

1.1.6. Для $\lambda \in \boldsymbol{C}$ положим $A_\lambda = \lambda I - A$. Понятно, что $Q(A_\lambda) = Q(A)$. Пусть $P_k(\lambda, A) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^{-i-1} A^i$; тогда для всякого $A^- \in Q(A)$ имеем

$$A^- \supset P_k(\lambda, A) + \lambda^{-k-1} A^{k+1} A^- + \nu(A_\lambda, A^-) P_k(\lambda, A).$$

1.1.7. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{C}$, $R_1, R_2 \in Q(A)$. Из 1.1.5 вытекает тождество

$$R_2 - R_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) R_2 R_1 + \nu(A_{\lambda_2}, R_2) R_1 - R_2 \nu(A_{\lambda_1}, R_1).$$

1.1.8. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ из 1.1.7 получаем соотношение

$$R_2 - R_1 = \nu(A_\lambda, R_2) R_1 - R_2 \nu(A_\lambda, R_1).$$

1.1.9. Предложение. *Если* $\bigcap \{N(A^-) \mid A^- \in Q(A)\} = \{0\}$, *то оператор* A *допускает замыкание.*

В самом деле, если $(0, y) \in \bar{A}$, то $(0, A^- y) \in A^- \bar{A} \subset \overline{A^- A} \subset \overline{A A^-} = A A^-$, то есть $A^- y = 0$ для всякого $A^- \in Q(A)$.

1.1.10. Условие предложения 1.1.9 выполнено, в частности, если $I \in \overline{\{A\}}$, где $\{A\} = \mathscr{L}(A_\lambda A^-$, $(\lambda, A^-) \in \boldsymbol{C} \times Q(A))$. В этом случае в алгебре $Q(A)$ уже содержится довольно обширная информация об операторе A. Для наших целей, однако, будет вполне достаточно (и удобнее) исследовать операторы A, удовлетворяющие несколько более сильному условию

$$I \in \{A\}. \qquad (*)$$

Интересно отметить, что это включение равносильно соотношению $\{A\} = [A]$, где $[A]$ означает совокупность всех эндоморфизмов X, перестановочных с A. В самом деле, если $S \in [A]$), то $Q(A) S \subset Q(A)$, откуда S принадлежит $\{A\}$ вместе с I; с другой стороны, согласно 1.1.2, $\{A\} \subset [A]$.

До конца этого пункта считаем выполненным условие (*).

1.1.11. Предложение. *Если $D(A)$ (секвенциально) плотно в X, то и $D(A^m)$ (секвенциально) плотно в X для любого $m \in \mathfrak{N}$.*

В силу 1.1.4 достаточно доказать плотность $X_m = \mathscr{L}(R(\Pi_m) \mid \Pi_m \in Q(A)^m)$. Как вытекает из (*), $D(A) \subset X_1$, т. е. $\overline{X}_1 = X$. Если $\overline{X}_{m-1} = X$, то $R(A^-) = A^- \overline{X}_{m-1} \subset \overline{A^- X_{m-1}} \subset \overline{X}_m$ для любого $A^- \in Q(A)$, откуда $X = \overline{X}_1 \subset \overline{X}_m$.

1.1.12. Пусть $\sigma \times Q_0 \subset C \times Q(A)$ — (конечное) множество, на котором реализуется (*): $I \in \mathscr{L}((\sigma I - A) Q_0)$.

Предложение. *Для произвольных k, $m \in \mathfrak{N}$ справедливо соотношение*

$$D(A^{k+m}) = \sum_{\Pi_k \in Q_0^k} \Pi_k D(A^m)$$

и в некотором смысле двойственное ему соотношение

$$D(A^m) = \bigcap_{\Pi_k \in Q_0^k} \Pi_k^{-1} D(A^{m+k}).$$

Действительно, полагая $A_\lambda = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i I - A)$ для $\lambda = (\lambda_i) \in C^k$, имеем

$$D(A^{k+m}) \subset \mathscr{L}(A_\lambda \Pi_k D(A^{k+m}) \mid (\lambda, \Pi_k) \in \sigma^k \times Q_0^k)$$
$$\subset \mathscr{L}(\Pi_k D(A^m) \mid \Pi_k \in Q_0^k).$$

С другой стороны, в силу 1.1.4, $\Pi_k D(A^m) \subset D(A^{m+k})$ и первое соотношение доказано. Аналогично доказывается и второе равенство.

В качестве следствия из полученных соотношений вытекают следующие три утверждения.

1.1.13. Предложение. *Если $Q_0 \subset Q(B)$ для некоторого оператора B, причем $\nu(A_\lambda, A^-) = \nu(B_\lambda, A^-)$ для всех $(\lambda, A^-) \in \sigma \times Q_0$, то $A = B$.*

Это следует из равенств $AA^- = BA^-$, $A^- \in Q_0$ и соотношений

$$D(A) = \sum_{A^- \in Q_0} R(A^-) = D(B).$$

1.1.14. Предложение. *Всякий полином от оператора A замкнут.*

В самом деле, если k — степень полинома P, то, очевидно, $Q(A)^k \subset Q(P)$, откуда $\bigcap_{\Pi \in Q(P)} N(\Pi) \subset \bigcap_{\Pi_k \in Q(A)^k} N(\Pi_k) =$

$=\{0\}$. В силу 1.1.9, оператор P допускает замыкание $\overline{P}$. Так как

$$P\Pi_k D(\overline{P}) \subset \Pi_k \overline{P} D(\overline{P}) \subset D(A^k) = D(P),$$

то, согласно 1.1.12,

$$D(\overline{P}) \subset \bigcap_{\Pi_k \in Q_0^k} \Pi_k^{-1} D(P^2) = \bigcap_{\Pi_k \in Q_0^k} \Pi_k^{-1} D(A^{2k}) = \\ = D(A^k) = D(P).$$

1.1.15. Предложение. *Пусть* $Y_0 = \mathscr{L}(A^- Y \mid A^- \in Q_0)$, *где* Y — *плотное в* X *множество. Тогда* $\overline{A \mid Y_0} = A$.

Достаточно заметить, что $AA^- = \overline{AA^- \mid Y}$ для всякого A^- из $Q(A)$, т. е. $A \mid R(A^-) \subset \overline{A \mid Y_0}$, откуда, как и в 1.1.13, получаем $A \subset \overline{A \mid Y_0}$. Обратное включение следует из замкнутости оператора A.

1.2. Определение квазирезольвенты. Общие свойства

1.2.1. Определение. Пусть $A \in \mathscr{L}(X)$ и $G \subset \boldsymbol{C}$. Отображение $R: G \to Q(A)$ называется *квазирезольвентой* (в G) оператора A. *Остатком* квазирезольвенты называется отображение $\nu: \lambda \to \nu(A_\lambda, R(\lambda))$, $\lambda \in G$.

1.2.2. Предложение. *Пусть множество* G *неограничено и* $\nu(\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0$. а) *Если множество* $\{R(\lambda) A x \mid \lambda \in G\}$ *ограничено, то* $R(\lambda) x \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0$; *если ограничено множество* $\{R(\lambda) A^2 x \mid \lambda \in G\}$, *то* $\lambda R(\lambda) x \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} x$. б) *Если* $D(A)$ *плотно в* X, *а семейство* $\{\lambda R(\lambda)\}$ $(\lambda \in G)$ *эквинепрерывно, то* $D(A^m)$ *секвенциально плотно в* X *для всякого* $m \in \mathfrak{N}$.

Первое утверждение вытекает из соотношения 1.1.6 (случаи $k=0$ и $k=1$). Далее, если $|\lambda_i| \xrightarrow[i]{} \infty$, $\lambda_i \in G$, то, в силу а), $\lambda_i R(\lambda_i) x \xrightarrow[i]{} x$ для всех x из множества $D(A^2)$, плотного в X (см. 1.1.11), откуда по теореме Банаха — Штейнгауза получаем $\lambda_i^m R(\lambda_i)^m \xrightarrow[i]{} I$. Это влечет второе утверждение.

1.2.3. Как вытекает из 1.1.7, квазирезольвента R удовлетворяет соотношению

$$R(\mu) - R(\lambda) = (\lambda - \mu) R(\mu) R(\lambda) + \nu(\mu) R(\lambda) - R(\mu) \nu(\lambda),$$

аналогичному тождеству Гильберта для резольвент.

1.2.4. Отображение $F: G \to L(X)$ будем называть *локально ограниченным* (*эквинепрерывным*), если для всякого компакта $K \subset G$ семейство операторов $\{F(\lambda)\}$ $(\lambda \in K)$ сильно ограничено (эквинепрерывно). Через $F[X]$ будем обозначать множество $\mathscr{L}(F(\lambda)X \mid \lambda \in G)$.

Предложение. *Пусть G — открытое множество (в $\mathbf{R}$ или в $\mathbf{C}$). Квазирезольвента R непрерывно дифференцируема k раз (в G), если и только если она локально ограничена, и отображение (R, ν) непрерывно дифференцируемо k раз (в G) на множестве $\nu[X] \times R[X]$. При этом справедливо соотношение*

$$R^{(i)}(\lambda) = -iR(\lambda)R^{(i-1)}(\lambda) + \nu^{(i)}(\lambda)R(\lambda) - R^{(i)}(\lambda)\nu(\lambda),$$
$$i = 1, \ldots, k.$$

1.3. Множества ограниченности

1.3.1. Пусть R — квазирезольвента линейного оператора A, определенная в Π_ω (для некоторого $\omega > 0$). Обозначим через B_R множество тех $x \in X$, для которых отображение $R(\cdot)x$ ограничено в Π_ε для всякого $\varepsilon > \omega$.

Определение. *Множеством ограниченности* квазирезольвенты R называется всякое подпространство Y, (секвенциально) плотное в X, и инвариантное относительно операторов $R(\lambda)$ и $AR(\lambda)$ для всех $\lambda \in \Pi_\omega$.

1.3.2. Прежде всего отметим следующий простой факт. Если множество B_R (секвенциально) плотно в X и операторы из $\nu[\Pi_\omega]$ перестановочны с операторами из $R[\Pi_\omega]$, то B_R — (наибольшее) множество ограниченности квазирезольвенты R, причем инвариантное относительно любого эндоморфизма, перестановочного с R.

1.3.3. Для $\mu = (\mu_i) \in C^k$ обозначим $\Pi_k(\mu) = \prod_{i=0}^{k} R(\mu_i)$.

Пусть Y — множество ограниченности R; положим

$$Y^{(k)} = \bigcap_{i=0}^{k} A^{-i}Y, \quad k \in \overline{\mathfrak{N}}.$$

Предложение. *Пусть $I \in \mathscr{L}(A_\lambda R(\lambda) \mid \lambda \in \sigma)$ для некоторого $\sigma \subset \Pi_\omega$. Тогда справедливо соотношение*

$$Y^{(m+k)} = \sum_{\mu \in \sigma^k} \Pi_k(\mu) Y^{(m)}, \quad k, m \in \overline{\mathfrak{N}}.$$

Это вытекает из 1.1.12, если заметить, что $Y^{(k)} = D(A_Y^k)$ и $R(\lambda)|Y \in Q(A_Y)$, где обозначено $A_Y = A \cap Y \times Y$.

1.3.4. При выполнении условий предложения 1.3.3 справедливо

Предложение. *Если $D(A)$, как и Y, (секвенциально) плотно в X, то и $Y^{(k)}$ (секвенциально) плотно в X для всякого k.*

Действительно, в силу 1.3.3, 1.1.12 и 1.1.11,

$$\overline{Y^{(k)}} \supset \overline{\sum_{\mu \in \sigma^k} \Pi_k(\mu)\,\overline{Y}} = \overline{\sum_{\mu \in \sigma^k} \Pi_k(\mu)\,X} = \overline{D(A^k)} = X.$$

1.4. Обратное преобразование Лапласа

Приступим к изучению квазирезольвенты с аналитической точки зрения. В этом пункте задана квазирезольвента R, сильно аналитичная (в Π_ω) на некотором множестве ограниченности Y, с остатком ν, удовлетворяющем условию

$$\nu(\lambda) = e^{-\lambda}\nu_0, \quad \lambda \in \Pi_\omega,$$

где ν_0 — некоторый эндоморфизм X [3].

Заметим, что алгебра $Q(A)$ в этом случае удовлетворяет всем условиям, встречавшимся ранее.

1.4.1. Для $x \in Y^{(k)} \cap Y^{(2)}$ положим

$$I_k(t, x) = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial \Pi_a} e^{\lambda t}\lambda^{-k} R(\lambda)\, A^k x\, d\lambda.$$

В силу 1.1.6, интеграл определен и не зависит от $a > \omega$.

1.4.2. Предложение. *Пусть $x \in Y^{(2)}$, и*

$$y(t)\,x = I_0(t, x),\ t \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\},\ y(0)\,x = x.$$

Отображение $y(\cdot)x$ непрерывно на $\boldsymbol{R}_+ \setminus \{1\}$, существует предел $\lim\limits_{t \to 1-0} y(t)x \equiv y(1)x$, и для всех $t \in \boldsymbol{R}_+$, $x \in Y^{(m+2)}$ имеет место соотношение

$$y(t)\,x = \sum_{i=0}^{m} (i!)^{-1} (t^i + \sigma(t)(t-1)^i \nu_0)\, A^i x + I_{m+1}(t, x),$$

где $\sigma = \chi_{(1, \infty)}$.

---

[3] На самом деле достаточно было бы лишь довольно быстрого (точнее экспоненциального) убывания на бесконечности производных ν, однако нам удобнее ограничиться условием указанного вида.

Доказательство вытекает из разложения 1.1.6 и очевидной непрерывности отображения $I_2(\cdot, x)$.

1.4.3. Предложение. *Для всех $k \in \mathfrak{N}$ справедливо включение*

$$y(t)\, Y^{(k+2)} \subset B_R^{(k)}$$

и равенства

$$y^{(k)}(t)x = y(t)A^k x = A^k y(t)x, \quad x \in Y^{(k+2)}.$$

В самом деле, если $x \in Y$, то для всякого $\varepsilon > \omega$, в силу 1.2.3, множество

$$\left\{R(\mu)R(\lambda)x \mid \mu \in \Pi_\varepsilon, \quad \lambda \in \partial\Pi_{\frac{\varepsilon+\omega}{2}}\right\}$$

ограничено, откуда для $x \in Y^{(2)}$ следует ограниченность множества $\{R(\mu)I_2(t, x) \mid \mu \in \Pi_\varepsilon\}$, т. е. $I_2(t, x) \in B_R$. Из 1.3.3 получаем

$$I_2\left(t, Y^{(k+2)}\right) = \sum_{\mu \in \Pi_\omega^k} \Pi_k(\mu) I_2\left(t, Y^{(2)}\right) \subset$$

$$\subset \sum_{\mu \in \Pi_\omega^k} \Pi_k(\mu) B_R = B_R^{(k)}.$$

Перестановочность A^k и $y(t)$ на $Y^{(k+2)}$ вытекает из замкнутости оператора A^k (см. 1.1.14). Соотношение для производных следует из разложения 1.4.2 и равенства $I_{k+1}^{(k)}(t, x) = I_1(t, A^k x)$, $x \in Y^{(k+2)}$.

1.4.4. Предложение. *Пусть $x \in Y^{(4)}$ и $y(t)x \in Y^{(2)}$. Тогда*

$$y(s)y(t)x = y(s+t)x, \quad s+t \in [0, 1).$$

Это важное для нас соотношение доказывается с помощью разложения 1.4.2 и тождества 1.2.3.

1.5. Восстановление квазирезольвенты

Теперь мы должны научиться каким-либо образом восстанавливать квазирезольвенту R по операторам $y(t)$, $t \in [0, 1]$. Вообще говоря, как показывает соотношение 1.1.8, этого сделать нельзя, однако можно попытаться выяснить условия, при которых такое восстановление все же возможно.

В этом пункте A, R и Y те же, что и в 1.4.

1.5.1. Для функции g обозначим

$$S(\lambda, t, g) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda^2 t)^{(k+1)}}{k!\,(k+1)!} g^{(k)}(\lambda).$$

Нам понадобится следующий факт (см. [7], теорема 6.3.3).

Лемма. *Пусть функция f такова, что $e^{a(\cdot)}f \in L^1(\mathbf{R}^+)$ для любого $a > \omega$. Положим*

$$g(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t)\, dt, \quad \lambda \in \Pi_\omega.$$

Тогда для каждого компакта $\Delta \subset \mathbf{R}^+$, в окрестности которого функция f непрерывна, $S(\lambda, t, g) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} f(t)$ равномерно по $t \in \Delta$.

1.5.2. Предложение. *Для всякого $t \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$ верно соотношение*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda, t, \langle x', R(\cdot)x\rangle) = \langle x', y(t)x\rangle, \; x \in Y^{(2)}, \; x' \in X'.$$

В самом деле, как видно из 1.4.2, функция $y(\cdot)x$ растет не быстрее любой экспоненты $e^{\varepsilon(\cdot)}$, $\varepsilon > \omega$, т. е. для $\lambda \in \Pi_\omega$ и $x \in Y^{(2)}$ интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} y(t)\, x dt$$

определен и равен, очевидно, $R(\lambda)x$. Остается воспользоваться леммой 1.5.1.

1.5.3. На множестве $Y^{(2)}$ определен оператор

$$U(\lambda) = \int_0^1 e^{-\lambda t} y(t)\, dt.$$

Предложение. *Если операторы $U(\lambda)$ и $y(1)$ распространяются с $Y^{(2)}$ до эндоморфизмов X* (для которых остаются те же обозначения), *то $U(\lambda) \in Q(A)$ и $\nu(A_\lambda, U(\lambda)) = -e^{-\lambda} y(1)$.*

В самом деле, для $x \in Y^{(3)}$, в силу замкнутости A и предложения 1.4.3, имеем

$$AU(\lambda)x = U(\lambda)Ax = \int_0^1 e^{-\lambda t} y'(t)\,x\,dt = \lambda U(\lambda)x - {} - x + e^{-\lambda} y(1)\,x,$$

т. е. для плотного в X множества $Y^{(3)}$

$$U(\lambda)A \,|\, Y^{(3)} \subset AU(\lambda) \,|\, Y^{(3)} \in L(Y^{(3)}, X).$$

Так как условия предложения 1.3.3, очевидно, выполнены для $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ в случае $e^{-\lambda_1} \neq e^{-\lambda_2}$, то $Y^{(3)} = R(\lambda_1)Y^{(2)} + R(\lambda_2)Y^{(2)}$, откуда, согласно 1.1.15, $\overline{A \,|\, Y^{(3)}} = A$. В таком случае предложение 1.1.3 гарантирует включение $U(\lambda) \in Q(A)$.

1.5.4. Теперь мы ответим на вопрос, поставленный в начале этого пункта.

Предложение. *Пусть для любых $x' \in X'$ и $x \in Y$ можно указать непрерывную функцию $\varphi_{x,x'}: (0, 1) \to \boldsymbol{R}_+$ такую, что*

$$|\langle x', R^{(k)}(\lambda)x\rangle| \leqslant \int_0^1 e^{-\lambda t} t^k \varphi_{x,x'}(t)\,dt$$

для всех $k \in \overline{\mathfrak{N}}$, $\lambda > \omega_1$. Тогда $U(\lambda) \,|\, Y^{(2)} \subset R(\lambda)$, $\lambda \in \Pi_\omega$.

В самом деле, в силу 1.5.2 и 1.5.1, имеем

$$|\langle x', y(t)x\rangle| = \left|\lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda, t, \langle x', R(\cdot)x\rangle)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda^2 t)^{k+1}}{k!\,(k+1)!} \left[\int_0^1 e^{-\lambda s} \varphi_{x,x'}(s)\,ds\right]_\lambda^{(k)} =$$

$$= \begin{cases} \varphi_{x,x'}(t), & t < 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Следовательно, $y(t)x = 0$, $t > 1$, и поэтому

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t)\,x\,dt = \int_0^1 e^{-\lambda t} y(t)\,x\,dt = U(\lambda)x.$$

§ 2. Общая схема порождения

В этом параграфе выделяется, по существу, наиболее широкий класс полугрупп, производящие операторы которых можно характеризовать в терминах квазирезольвенты, и доказывается теорема порождения. Рассматривается и случай банахова пространства.

2.1. *Предварительные сведения о полугруппах*

2.1.1. Определение. *Полугруппой операторов* (*в* X) называется сильно непрерывное локально эквинепрерывное представление в X аддитивной полугруппы $R^+ = (0, \infty)$.

В случае бочечного пространства X локальная эквинепрерывность полугруппы, очевидно, вытекает из условия сильной непрерывности, которое, в свою очередь, для достаточно общих локально выпуклых пространств является следствием более слабого условия измеримости.

2.1.2. С полугруппой T свяжем следующие обозначения:

$$X_0(T) = \bigcup_{t>0} R(T(t)), \quad N_0(T) = \bigcap_{t>0} N(T(t)).$$

Через $\Sigma(T)$ обозначим совокупность тех $x \in X$, для которых $\lim\limits_{t\to+0} T(t)x = x$ (*непрерывность в нуле*), через $J(T)$ — для которых отображение $T(\cdot)x$ *абсолютно суммируемо в нуле*, т. е.

$$\int_0^1 p(T(t)x)\,dt < \infty, \; p \in \mathfrak{P}.$$

Далее, для $k \in \mathfrak{R}$ положим

$$C_T(k, t) = t^{-k} k \int_0^t (t-s)^{k-1} T(s)\,ds;$$

через $H_k(T)$ обозначим множество тех $x \in J(T)$, для которых $\lim\limits_{t\to+0} C_T(k, t)x = x$ (*чезаровская непрерывность в нуле* порядка k). Наконец, пусть

$$R_T^0(\lambda) = \int_0^1 e^{-\lambda t} T(t)\,dt$$

и $H(T)$ — множество всех $x \in J(T)$, для которых $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda R_T^0(\lambda)\, x = x$ (*абелевская непрерывность в нуле*).

2.1.3. Предложение. *Все введенные в* 2.1.2 *подпространства инвариантны относительно* T (т. е. операторов $T(t)$, $t>0$) *и связаны включениями*[4]:

$$X_0 \subset \Sigma \subset H_k \subset H_{k+1} \subset H \subset J.$$

2.1.4. Пусть $A_h = h^{-1}(T(h) - I)$, $h>0$.

Определение. *Инфинитезимальным оператором полугруппы* T называется оператор $A_0 = \{(x, y) \in X^2 \mid \exists \lim\limits_{h \to +0} A_h x = y\}$. Если A_0 допускает замыкание $\bar{A}_0 = A$, то A называется *производящим оператором* T.

2.1.5. Отметим некоторые общие свойства инфинитезимального оператора, вытекающие из определений.

Предложение. а) *Оператор* A_0 *линеен и* $D(A_0) \subset \Sigma$.

б) *Для всех* $x \in D(A_0)$ и $t \geqslant 0$ *справедливы соотношения*

$$T'(t)x = T(t)A_0 x = A_0 T(t)x.$$

в) *Имеют место включения*

$$R^0(\lambda)A_0 \subset A_0 R^0(\lambda) \mid H_1 = [\lambda R^0(\lambda) - I + e^{-\lambda} T(1)] \mid H_1.$$

г) *Множество* $X_0 \cap D(A_0^\infty)$ *секвенциально плотно в* X_0.

д) *Если* $N_0 \cap \bar{X}_0 = \{0\}$, *то оператор* A_0 *допускает замыкание.*

2.1.6. Предположим, что полугруппа T имеет производящий оператор A.

Предложение. а) *Для всех* t, $h>0$ *справедливы соотношения*

$$\int_t^{t+h} T(s)\,A\,ds \subset A_0 \int_t^{t+h} T(s)\,ds = T(t+h) - T(t).$$

б) *Имеет место включение* $A^{-1}[H_1] \cap \Sigma \subset D(A_0)$; *в частности,*

$$T(t)\,D(A^n) \subset D(A_0^n), \quad t>0, \quad n \in \mathfrak{N}.$$

---

[4] Индекс T опускается, если это не ведет к путанице.

в) *Если* X_0 *плотно в* X *и существует расширение* $R^0(\lambda)|X_0 \subset R(\lambda) \in L(X)$, *то* $R(\lambda)$ — *квазиобратный к* A (*с остатком* $\nu(A_\lambda, R(\lambda)) = -e^{-\lambda}T(1)$), *перестановочный с* T; *при этом* $R^0(\lambda)|\Sigma \subset R(\lambda)$.

Действительно, а) вытекает из 2.1.5 (б); б) следует теперь из а). Для проверки в) заметим, что в силу включений $A = \bar{A}_0 = \overline{A_0|H_1} \subset \overline{A|H_1} \subset A$ и соотношения 2.1.5 (в) выполнены условия предложения 1.1.3, т. е. $R(\lambda) \in Q(A)$. Перестановочность $R^0(\lambda)$ и T на X_0, очевидно, распространяется на X. Наконец, если $x \in \Sigma$, то, согласно 2.1.5 (в), и $R^0(\lambda)x \in \Sigma$, откуда

$$R^0(\lambda)x = \lim_{t\to+0} T(t)R^0(\lambda)x = \lim_{t\to+0} R(\lambda)T(t)x = R(\lambda)x.$$

2.2. Теорема порождения

2.2.1. Определение. Будем называть T *полугруппой класса* E, если выполнены следующие условия:

$E1$) множество X_0 плотно в X;

$E2$) для всякого $\lambda \in \Pi_\omega$ существует расширение $R^0(\lambda)|X_0 \subset R(\lambda) \in L(X)$;

$E3$) $\bigcap_{\lambda > \omega} R(\lambda)^{-1}[0] = \{0\}$.

2.2.2. Предложение. *Полугруппа* T *класса* E *имеет производящий оператор* A, *и отображение* $R: \lambda \to R(\lambda)$ *есть квазирезольвента*[5] A (*с остатком* — $T(1)$), *для которой* X_0 *есть множество ограниченности и аналитичности.*

В самом деле, так как $R^0(\lambda)|D(A_0) \subset R(\lambda)$ (см. 2.1.6 (в)), то для $x_\alpha \in D(A_0)$, в силу 2.1.5 (в), имеем $R(\lambda)A_0x_\alpha = A_0R^0(\lambda)x_\alpha = \lambda R(\lambda)x_\alpha - x_\alpha + e^{-\lambda}T(1)x_\alpha$. Стало быть, если $(x_\alpha, A_0x_\alpha) \to (0, y)$, то $R(\lambda)y = \lim_\alpha R(\lambda)A_0x_\alpha = 0$, $\lambda \in \Pi_\omega$, или $y = 0$. Итак, существует $\bar{A}_0$, и можно воспользоваться предложением 2.1.6 (в).

2.2.3. Теперь мы можем выяснить, когда линейный оператор A порождает некоторую полугруппу класса E.

---

[5] Всюду далее рассматриваются лишь квазирезольвенты, удовлетворяющие условиям пункта 1.4; для краткости остатком квазирезольвенты называем оператор ν_0.

Теорема. *Оператор A с секвенциально плотной областью определения*[6] *порождает полугруппу класса E тогда и только тогда, когда он замкнут, имеет квазирезольвенту*[7] R *(в Π_ω для некоторого ω), сильно аналитическую на некотором секвенциально плотном множестве ограниченности Y, и для каждой полунормы $p\in\mathfrak{P}$ можно указать непрерывную функцию $\varphi_p\colon(0,\ 1)\times X\to\boldsymbol{R}_+$, удовлетворяющую условиям:*

а) $\sup\limits_{t\in\Delta}\varphi_p(t,\ x)\to 0$ *при* $x\to 0$ *для всякого замкнутого* $\Delta\subset\overline{(0,\ 1)}$;

б) *для всех* $x\in Y$, $k\in\overline{\mathfrak{N}}$ *и* $\lambda>\omega$

$$p\left(R^{(k)}(\lambda)\,x\right)\leqslant\int\limits_0^1 e^{-\lambda t}t^k\varphi_p(t,\ x)\,dt<+\infty.$$

При этом порождаемая полугруппа T удовлетворяет оценкам

$$p(T(t)x)\leqslant\varphi_p(t,\ x),\ x\in X,\ t\in(0,\ 1).$$

Необходимость условий следует из предложения 2.2.2, если в качестве R взять каноническую квазирезольвенту A (расширение R^0) и положить $Y=X_0$ и $\varphi_p(t,\ x)=p(T(t)x)$, $p\in\mathfrak{P}$.

Покажем достаточность. Так как R удовлетворяет всем условиям пункта 1.4, можно определить $T(t)x=I_0(t,\ x)$ для $x\in Y^{(2)}$, $t\in(0,\ 1)$. В силу 1.5.2, 1.5.1 и условия б), для всякого $x'\in X'$, $|x'|\leqslant p$ имеем оценку

$$\langle x',\ T(t)\,x\rangle=\lim_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(\lambda^2t)^{k+1}}{k!\,(k+1)!}\langle x',\ R^{(k)}(\lambda)\,x\rangle\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(\lambda^2t)^{k+1}}{k!\,(k+1)!}\left[\int\limits_0^1 e^{-\lambda s}\varphi_p(s,x)\,ds\right]^{(k)}=\varphi_p(t,x),$$

т. е. согласно теореме Банаха, $p(T(t)x)\leqslant\varphi_p(t,\ x)$. Так как множество $Y^{(2)}$ секвенциально плотно в X (см. 1.3.4), а пространство X секвенциально полно, то, в силу условия а), можно считать $T(t)\in L(X)$; при этом сохраняют-

[6] Если X полно, достаточно плотности $D(A)$. Если в определении 2.2.1 требовать секвенциальной плотности X_0, то условие секвенциальной плотности $D(A)$ необходимо.

[7] См. сноски на с. 136 и с. 130.

ся оценки $pT\leqslant\varphi_p$. Условие а) влечет, таким образом, эквинепрерывность семейства $\{T(t)\}$ $(t\in\Delta)$. Вспомнив, что отображение $T(\cdot)x$ непрерывно на $[0, 1]$ для $x\in Y^{(2)}$ (предложение 1.4.2), по теореме Банаха — Штейнгауза получаем сильную непрерывность T на $(0, 1)$.

Докажем теперь соотношение $T(t+s)=T(t)T(s)$ для $t+s<1$. Отметим прежде всего, что из инвариантности $Y^{(2)}$ относительно $R(\lambda)$ следует $T(t)R(\lambda)x=I_0(t, R(\lambda)x)=$ $=R(\lambda)I_0(t, x)=R(\lambda)T(t)x$ для $x\in Y^{(2)}$, т. е. $R(\lambda)$ перестановочно с $T(t)$. Из 1.3.2 теперь вытекает, что существует наименьшее множество ограниченности $\tilde{Y}$, содержащее Y и инвариантное относительно операторов $T(t)$, $t\in(0, 1)$. Нетрудно понять, что аналитичность R (в Π_ω) на $\tilde{Y}$ сохраняется. Итак, мы можем определить (см. 1.4)

$$\tilde{y}(t)x=I_0(t, x),\ x\in\tilde{Y}^{(2)},\ t\in(0, 1).$$

Согласно 1.4.4, если $x\in\tilde{Y}^{(4)}$ и $\tilde{y}(t)x\in\tilde{Y}^{(2)}$, то $\tilde{y}(s)\tilde{y}(t)x=$ $=\tilde{y}(s+t)x$. Заметим, что для $x\in Y^{(4)}$, в силу 1.4.3 и включений $A^ix\in Y^{(2)}$, $i=1, 2$, справедливы соотношения $A^i\tilde{y}(t)x=\tilde{y}(t)A^ix=T(t)A^ix\in\tilde{Y}^{(2)}$, т. е. $\tilde{y}(t)Y^{(4)}\subset\tilde{Y}^{(2)}$. Учитывая включение $Y^{(4)}\subset\tilde{Y}^{(4)}$ и перестановочность T и R, для $x\in Y^{(4)}$ получаем

$$T(s+t)x=\tilde{y}(s+t)x=\tilde{y}(s)\tilde{y}(t)x=I_0(s, T(t)x)=$$
$$=T(t)I_0(s, x)=T(t)T(s)x.$$

Так как $Y^{(4)}$ плотно в X, то полугрупповое свойство доказано.

Определим теперь T на всей полупрямой $\boldsymbol{R}^+$ следующим образом. Пусть $t\in[n, n+1)$, $n\in\mathfrak{N}$; положим $T(t)\equiv$ $\equiv T(t/(n+1))^{n+1}$. Нетрудно проверить, что полугрупповое соотношение, а значит, и сильная непрерывность и локальная эквинепрерывность для отображения $T:\boldsymbol{R}^+\to$ $\to L(X)$ сохраняются, т. е. T — полугруппа в X.

Докажем теперь, что $T\in E$. Так как, согласно 1.4.2, $Y^{(2)}\subset\Sigma(T)\subset\overline{X_0(T)}$, то $X_0(T)\equiv X_0$ плотно в X. Далее, так как выполнены условия предложения 1.5.4, то $R_T^0(\lambda)\,|\,Y^{(2)}\subset R(\lambda)$, $\lambda\in\Pi_\omega$, т. е. эндоморфизм $R^0(\lambda)T(t)$, $t>0$, совпадает с $R(\lambda)T(t)$ на плотном множестве $Y^{(2)}$, откуда $R^0(\lambda)\,|X_0\subset R(\lambda)$.

Наконец, из равенств $R(\lambda)x=0$, $\lambda>\omega$, вытекает

$$x=\lim_{\lambda\to+\infty}(I+e^{-\lambda}v_0)x=\lim_{\lambda\to+\infty}A_\lambda R(\lambda)x=0.$$

Итак, $T \in E$. Следовательно (см. 2.2.2), полугруппа T имеет производящий оператор B, для которого R — квазирезольвента с остатком $-T(1)$. С другой стороны, в силу 1.5.3, R — квазирезольвента оператора A с остатком $-\tilde{y}(1) = -T(1)$. Из 1.1.13 получаем в таком случае $A = B$. Теорема доказана.

2.2.4. Итак, производящие операторы полугрупп класса E допускают описание в терминах квазирезольвенты. По существу, это наиболее широкий из таких классов и вот в каком смысле: *если полугруппа T имеет производящий оператор, обладающий квазирезольвентой, абсолютной* (т. е. удовлетворяющей условиям предложения 1.5.4) *и перестановочной с T, то $T \in E$* (ср. 2.2.2).

2.3. Случай банахова пространства

Рассмотрим теперь полугруппы класса E в банаховом пространстве X. Тезис, сформулированный в 2.2.4, в этом случае подтверждается следующим образом.

2.3.1. Предложение. *Полугруппа принадлежит классу E в том и только том случае, когда ее производящий оператор имеет резольвенту в некоторой полуплоскости Π_ω.*

Действительно, если квазирезольвента существует в Π_{ω_1}, а ω_0 — тип полугруппы T, то при $\omega = \max(\omega_0, \omega_1)$ операторы

$$R^\infty(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt, \quad \lambda \in \Pi_\omega,$$

распространяются с X_0 до $R_A(\lambda)$ — эндоморфизмов X. При этом, как нетрудно видеть, $R(\lambda) = R_A(\lambda)(I - e^{-\lambda}T(1))$. Умножая это равенство слева на A_λ, а справа — на $\prod_{i=0}^{n-1}\left(I + e^{-2^i\lambda}T(2^i)\right)$, получим $A_\lambda R_A(\lambda)\left(I - e^{-2^n}T(2^n)\right) = I - e^{-2^n}T(2^n)$. Так как $e^{-m\lambda}T(m) \underset{m}{\to} 0$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, а оператор A замкнут, то $A_\lambda R_A(\lambda) = I$. Аналогично для $x \in D(A)$, полагая $y = AR_A(\lambda)x - R_A(\lambda)Ax$, получим $y = AR(\lambda)x - R(\lambda)Ax + e^{-\lambda}T(1)y$, т. е. $y = e^{-\lambda n}T(n)y \underset{n}{\to} 0$. Итак, $R_A(\lambda) = R(\lambda, A)$.

Обратно, если $x \in X_0$, то, очевидно, $A_\lambda R^\infty(\lambda)x = x$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0$, так что если λ из $\rho(A)$ — резольвентного множества A, то $R^\infty(\lambda)x = R(\lambda, A)x$. Так как, понятно, всегда $R^\infty(\lambda) - R^0(\lambda) \in L(X)$ для $\lambda \in \Pi_{\omega_0}$, то последнее равенство означает непрерывность $R^0(\lambda)$ на X_0, где множество X_0, в силу включений

$$X = \lambda R(\lambda, A)X - AR(\lambda, A)X \subset D(A) + R(A) \subset \overline{X}_0,$$

плотно в X. Если, наконец, $R(\lambda)x = 0$, то $R(\lambda, A)x = e^{-\lambda}T(1)R(\lambda, A)x$, откуда $R(\lambda, A)x = 0$, или $x = 0$. Итак, $T \in E$.

2.3.2. Полученная характеризация класса E подсказывает следующую формулировку теоремы 2.2.3 для банахова случая.

Теорема. *Линейный оператор A порождает полугруппу класса E, если и только если*

1) *A — замкнут и $D(A)$ плотно в X;*

2) *$\Pi_\omega \subset \rho(A)$ для некоторого ω;*

3) *существует подпространство Y, плотное в X и инвариантное относительно резольвент $R(\lambda, A)$, $\lambda \in \Pi_\omega$, и такое, что для всякого $x \in Y$ отображение $R(\cdot, A)x$ ограничено в Π_ω;*

4) *существует непрерывная функция φ: $\boldsymbol{R}^+ \times X \to \boldsymbol{R}_+$, удовлетворяющая условиям:*

а) $\varphi(t, x) \leqslant C_t \|x\|$, $t \in \boldsymbol{R}^+$, $x \in Y$;

б) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\omega t}\varphi(t, x)\, dt < +\infty, \quad x \in Y;$

в) *для всяких $x \in Y$, $m \in \overline{\mathfrak{N}}$ и $\lambda > \omega$ справедливы оценки*

$$\| R^{m+1}(\lambda, A)\, x \| \leqslant \frac{1}{m!} \int_0^1 e^{-\lambda t} t^m \varphi(t, x)\, dt.$$

При этом порождаемая полугруппа T удовлетворяет оценкам

$$\|T(t)x\| \leqslant \varphi(t, x), \quad \|T(t)\| \leqslant C_t, \quad t \in \boldsymbol{R}^+, \ x \in X.$$

§ 3. Основные классы полугрупп

При характеризации производящих операторов полугрупп класса E условия на квазирезольвенту налагались на некотором множестве ограниченности, которое, вообще говоря, не определяется „конструктивно" оператором A. Причина этого заключается в том, что область определения A в общем случае не обладает никакой квалификацией.

Всякие условия на $D(A)$ есть так или иначе ограничения на поведение полугруппы в нуле. Некоторыми условиями такого рода мы и займемся в этом параграфе.

3.1. Суммируемость в нуле

Для удобства формулировок (определений и утверждений) в этом пункте считаем пространство X бочечным.

3.1.1. Определение. Будем называть T *полугруппой класса* J_k, $k\in\overline{\mathfrak{N}}$, если 1) $T\in E$; 2) $D(A^k)\subset J$[8].

3.1.2. Класс J_k допускает следующую характеризацию.

Предложение. *Полугруппа T принадлежит классу J_k тогда и только тогда, когда она имеет производящий оператор A, обладающий квазирезольвентой, перестановочной с T, и $D(A^k)\subset J$.*

3.1.3. Выясним некоторые свойства полугрупп класса J_k.

Предложение. *Имеют место следующие соотношения:*

а) $T(t)x-x=\int\limits_0^t T(s)Axds, \qquad x\in D(A^{k+1}),\ t\geqslant 0;$

б) $D(A^{k+1})\subset\Sigma$;

в) $D\left(A^{k+m+1}\right)\subset D\left(A_0^m\right), \quad m\in\mathfrak{N}$;

г) $N_0=\{0\}$;

д) $R^0(\lambda)\,|\,J=R(\lambda)\,|\,J$, $\lambda\in\Pi_\omega$.

В самом деле, из перестановочности T и R — канонической квазирезольвенты A — вытекает $R(\lambda)D(A_0)\subset\subset D(A_0)$, т. е. для $y\in D(A_0)$, в силу 2.1.5 (б), получаем

$$T(t)\,\Pi_k(\mu)\,y-\Pi_k(\mu)\,y=\int\limits_0^t T(s)\,\Pi_k(\mu)\,Ayds,\ \ \mu\in\Pi_\omega^k.$$

---

[8] A — производящий оператор T.

Это соотношение остается верным и для $y \in D(A)$, так как ввиду бочечности X и включения $R(\Pi_k(\mu)) \subset J$ оператор $\int\limits_0^t T(s)\,\Pi_k(\mu)\,ds$, очевидно, непрерывен. Таким образом, соотношение а), в силу 1.1.12, выполнено на множестве $\mathscr{L}\left(\Pi_k(\mu)\,D(A) \mid \mu \in \Pi_\omega^k\right) = D\left(A^{k+1}\right)$. Отсюда непосредственно вытекает включение б), которое, в свою очередь, вместе с 2.1.6 (б) влечет $D\left(A^{k+2}\right) \subset \sum \cap \cap A^{-1} \sum \subset D(A_0)$, т. е. для $m=1$ (а тем самым и для произвольного $m \in \mathfrak{N}$) включение в) установлено. Далее, если $x \in N_0$, то, разумеется, и $y = R^{k+1}(\lambda)\,x \in N_0$. Однако $y \in D(A^{k+1}) \subset \Sigma$, т. е. $y \in N_0 \cap \sum = \{0\}$. Из соотношения $\left(I - e^{-\lambda} T(1)\right)^{k+1} = A_\lambda^{k+1} R(\lambda)^{k+1}$ следует теперь $x = A_\lambda^{k+1} y = 0$. Наконец, из включений $T(t)R(\lambda) = R^0(\lambda)T(t) \supset T(t)R^0(\lambda)/J$ получаем, что $R(\lambda)x - R^0(\lambda)x \in N_0 = \{0\}$ для всех $x \in J$.

3.1.4. Теперь выясним, когда линейный замкнутый оператор A с плотной в X областью определения порождает полугруппу класса J_k.

Теорема. *Оператор A является производящим оператором некоторой полугруппы из класса J_k в том и только том случае, когда он имеет квазирезольвенту R, сильно аналитическую и ограниченную в Π_ω на множестве $D(A^k)$, и существуют непрерывные функции $\varphi_p : (0,\ 1) \times X \mapsto \boldsymbol{R}_+$, $p \in \mathfrak{P}$, такие, что $\varphi_p(t,\ 0) = 0$, $t \in (0,\ 1)$, и для всех $x \in D(A^k)$, $n \in \overline{\mathfrak{N}}$, $\lambda > \omega$ выполнены оценки*

$$p\left(R^{(n)}(\lambda)\,x\right) \leqslant \int\limits_0^1 e^{-\lambda t} t^n \varphi_p(t,\ x)\,dt < \infty.$$

В самом деле, $Y \equiv D(A^k)$ — это, очевидно, множество ограниченности R, т. е. для такого Y выполнены условия теоремы 2.2.3, правда, в несколько более слабой форме — не требуется равностепенной непрерывности в нуле функций $\varphi_p(t,\ \cdot)$, $t \in \Delta$. Это не мешает, однако, построить операторы $T(t)$, удовлетворяющие оценкам $p(T(t)x) \leqslant \varphi_p(t,\ x)$ для всех x из $Y^{(2)} = D(A^{k+2})$. Следовательно, операторы $T(t)$ распространяются непрерывно на все X, а из непрерывности функции φ_p по $t \in (0,\ 1)$ следует сильная ограниченность семейства $\{T(t)\}$ $(t \in \Delta)$, что ввиду бочечности пространства X равносильно эквинепрерывности этого семейства. В результате получаем полугруппу класса E, для которой A — производящий оператор. Из условия суммируемости функции $\varphi_p(\cdot, x)$ для $x \in D(A^k)$ и полученных оценок на T следует $D(A^k) \subset J(T)$, т. е. $T \in J_k$.

3.1.5. Для случая банахова пространства X класс J_k описывается следующим образом.

Предложение. *Полугруппа принадлежит классу J_k тогда и лишь тогда, когда она имеет производящий оператор с непустым резольвентным множеством и суммируема в нуле на $D(A^k)$.*

Производящие операторы полугрупп класса J_k характеризует

Теорема. *Оператор A порождает полугруппу класса J_k тогда и только тогда, когда выполнены условия теоремы 2.3.2 для $Y = D(A^k)$. При этом условие 3) указанной теоремы равносильно существованию такого $M > 0$, что выполняются оценки*

$$\| R(\lambda, A) x \| \leqslant M \sum_{i=0}^{k} \| A^i x \|, \ x \in D(A^k), \ \lambda \in \Pi_\omega.$$

3. 2. Непрерывность в нуле

Условия в теоремах порождения мы формулировали в виде интегральных оценок на производные квазирезольвенты. Рассмотрим теперь другого типа условия на примере следующего класса полугрупп.

3.2.1. Определение. Назовем T *полугруппой класса $C_{(k)}$*, $k \in \overline{\mathfrak{N}}$, если 1) $T \in E$; 2) семейство операторов $\{T(t) | D(A^k)\}$ $(t \in [0, 1])$ эквинепрерывно в $L(D(A^k), X)$.

Условие 2) в случае бочечного X, очевидно, равносильно включению $D(A^k) \subset \Sigma(T)$ (т. е. сильной непрерывности полугруппы в нуле на $D(A^k)$).

3.2.2. Доказательство теоремы порождения для класса $C_{(k)}$ основано на следующей лемме, позволяющей формулировать условия только на полупрямой, не требуя даже существования квазирезольвенты в полуплоскости.

Лемма. *Пусть оператор A с плотной областью определения имеет в (ω, ∞) квазирезольвенту R такую, что для всякого $\mu \in (\omega, \infty)^k$ семейство операторов*

$$\{(\operatorname{Re} \lambda)^{n+1} (n!)^{-1} R^{(n)}(\lambda) \Pi_k(\mu)\} \ (n \in \overline{\mathfrak{N}}, \ \lambda > \omega)$$

эквинепрерывно. Тогда R можно распространить с (ω, ∞) на Π_ω, сохраняя рассматриваемое условие эквинепрерывности для расширенного семейства (т. е. по всем $\lambda \in \Pi_\omega$). При этом $D(A^k)$ есть множество ограниченности и аналитичности R (в Π_ω).

Схема доказательства следующая. Для λ из множества $C_{\lambda_0} = \{|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0 - \omega\}$, $\lambda_0 > \omega$, определим операторы

$$\tilde{R}(\lambda)\Pi_k(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\lambda_0)^n}{n!} R^{(n)}(\lambda_0)\Pi_k(\mu), \quad \mu \in (\omega, \infty)^k.$$

В силу 1.1.12, операторы $\tilde{R}(\lambda_0)$ распространяются (по линейности) на $D(A^k)$ и, как вытекает из 1.2.4, удовлетворяют соотношению

$$\tilde{R}(\lambda)(I+\nu(\lambda_0)) - R(\lambda_0)(I+\nu(\lambda)) = (\lambda_0 - \lambda)\tilde{R}(\lambda)R(\lambda_0).$$

Так как $C_{\lambda_0} \subset C_{\lambda_1}$, $\lambda_1 > \lambda_0$, то распространение R, соответствующее λ_1, в силу внутренней теоремы единственности аналитической функции, на C_{λ_0} совпадает с $\tilde{R}$. Поэтому в последнем соотношении вместо λ_0 можно написать λ_1. Это позволяет (ввиду того, что $I = \alpha(I+\nu(\lambda_0)) + \beta(I+\nu(\lambda_1))$ для некоторых α и β) разложить $\tilde{R}(\lambda)$ в линейную комбинацию некоторых эндоморфизмов и операторов вида $\tilde{R}(\lambda)\Pi_k(\mu)$, которые, очевидно, непрерывны, т. е. $\tilde{R}(\lambda)$ распространяется по непрерывности на все X. Из квазирезольвентного соотношения теперь выводится, что $\tilde{R}$ — квазирезольвента оператора A (определенная в $\bigcup_{\lambda_0 > \omega} C_{\lambda_0} = \Pi_\omega$). Наконец, в силу условия эквинепрерывности, найдутся (см. [16]) функции $\varphi_{x,x'}$, $x \in D(A^k)$, $x' \in X'$, такие, что

а) $|\varphi_{x,x'}(s)| \leqslant \sup\{(\lambda^{n+1}/n!)|\langle R^{(n)}(\lambda)x, x'\rangle| : n \in \mathfrak{N}, \lambda > \omega\}$;

б) $\langle R(\lambda)x, x'\rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\varphi_{x,x'}(s)\,ds, \quad \lambda > \omega.$

Отсюда и вытекают утверждения леммы.

3.2.3. Теорема. *Для того чтобы линейный замкнутый оператор A с секвенциально плотной областью определения порождал полугруппу класса $C_{(k)}$, необходимо и достаточно существование квазирезольвенты R (в (ω, ∞)) оператора A, удовлетворяющей условиям:*

1) *семейство операторов* $\{(\lambda^{n+1}/n!)R^{(n)}(\lambda)\}$ $(n\in\mathfrak{N},$ $\lambda>\omega)$ *эквинепрерывно в* $L(D(A^k), X)$;

2) *для каждой полунормы* $p\in\mathfrak{P}$ *можно указать семейство* $\{p_t\}$ $(t\in(0, 1))\subset\mathfrak{P}$ *такое, что*

а) $p_t\leqslant p_s$, $0<s\leqslant t<1$;

б) *для любых* $x\in D(A^k)$, δ', $\delta\in(0, 1)$, $\delta'<\delta$, *и* $\varepsilon>0$ *можно указать число* $\lambda_0=\lambda_0(x, \delta', \delta, \varepsilon)>\omega$ *так, что*

$$p\left(\lambda^{n+1}(n!)^{-1}R^{(n)}(\lambda)\,x\right)\leqslant p_{\delta'}(x)+\varepsilon$$

для всех $\lambda\in(\lambda_0, \delta^{-1}n)$, $n\in\mathfrak{N}$. *При этом порождаемая полугруппа* T *удовлетворяет оценкам* $p(T(t)x)\leqslant p_t(x)$, $x\in X$, $t\in(0, 1)$.

Роль леммы 3.2.2 здесь заключается в том, что она позволяет провести общую схему порождения, т. е. доставляет возможность использовать конструкции из пункта 1.4 и построить операторы $T(t)=I_0(t, \cdot)$ на множестве $D(A^{k+2})$. Условие 2) позволяет установить непрерывность этих операторов и сильную непрерывность T по $t\in(0, 1)$.

3.2.4. З а м е ч а н и е. Включения $C_{(k)}\subset J_k\subset C_{(k+1)}$ позволяют вместо условия 2) потребовать выполнения, например, условия б) теоремы 2.2.3 (для $Y=D(A^k)$). С другой стороны, и в теоремах порождения для суммируемых полугрупп (см. теорему 3.1.4) можно обойтись квазирезольвентой, заданной лишь на полупрямой, и вместо интегральных оценок формулировать условия типа 2).

3.2.5. В случае $k=0$ определение 3.2.1 выделяет классические полугруппы класса C_0 (для бочечного пространства — это просто непрерывные в нуле полугруппы). Легко видеть, что в этом случае в теореме 3.2.3 второе условие является следствием первого. Таким образом, мы получаем для локально выпуклого пространства аналог классической теоремы Хилле — Иосида — Филлипса [6, 7].

Т е о р е м а. *Линейный оператор порождает полугруппу класса* C_0 *тогда и только тогда, когда он замкнут, почти всюду определен и имеет квазирезольвенту* R *такую, что семейство операторов* $\{\lambda^{n+1}(n!)^{-1}R^{(n)}(\lambda)\}$ $(n\in\mathfrak{N},$ $\lambda>0)$ *эквинепрерывно.*

3.2.6. В связи с рассмотренными полугруппами отметим следующий класс.

Определение. Полугруппа T принадлежит *классу* E_0, если $T \in E$ и каноническая квазирезольвента (т. е. семейство $\{R(\lambda)\}$ $(\lambda \in \Pi_\omega)$) эквинепрерывна.

Условие ограниченности квазирезольвенты позволяет установить включение $E_0 \subset C_{(2)}$. Отсюда легко вытекает

Теорема. *Необходимые и достаточные условия порождения оператором A полугруппы класса E_0 — это существование квазирезольвенты R, сильно аналитической и эквинепрерывной в Π_ω, удовлетворяющей условиям теоремы 2.2.3 (или теоремы 3.2.3 для $k=2$), и такой, что эквинепрерывно семейство $\{\lambda^{n+1}(n!)^{-1}R^{(n)}(\lambda)v_0\}$ $(n \in \in \mathfrak{N}, \lambda > \omega)$, где v_0 — остаток R.*

3.2.7. С каждым классом полугрупп можно связать подкласс так называемых *абелевских полугрупп*, для которых семейство $\{\lambda R(\lambda)\}$ $(\lambda > \omega)$ эквинепрерывно, что в случае бочечного пространства равносильно соотношению $\lambda R(\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\to} I$. Так, соответствующий классу E_0 абелевский подкласс — это полугруппы *класса* (A), исследовавшиеся в банаховом пространстве Филлипсом [7, 14].

Для абелевских полугрупп, в силу 1.2.2 (б), условие плотности (=секвенциальной плотности) может быть включено в необходимые и достаточные условия в теоремах порождения. Сами эти теоремы получаются из соответствующих теорем для исходных классов путем добавления указанного условия эквинепрерывности. Например, теорема 3.2.6, сформулированная с такими изменениями, дает описание производящих операторов полугрупп класса (A) — в банаховом случае это основная теорема порождения Филлипса. Полугруппы из класса (A), суммируемые в нуле, составляют *класс* $(0, A)$, изучавшийся Миядера [12]. Теорема порождения для этого класса в силу соотношения $(0, A) = (A) \cap J_0$ вытекает из соответствующих теорем для (A) и J_0.

3.3. Чезаровская непрерывность

Рассмотрим, наконец, следующие классы полугрупп.

3.3.1. Определение. Будем называть T *полугруппой класса* Ch_k, $k \in \mathfrak{N}$, если $H_k = X$.

В силу соотношений 2.1.3, справедливы включения

$$C_0 \subset Ch_k \subset Ch_{k+1} \subset (0, A).$$

Таким образом, если получить (необходимые и достаточные) условия принадлежности классу Ch_k полугруппы из класса $(0, A)$, вопрос порождения для чезаровских полугрупп будет решен.

3.3.2. Теорема. *Пусть* $T \in (0, A)$, R — *каноническая квазирезольвента производящего оператора* T. *Включение* $T \in Ch_k$ *равносильно эквинепрерывности семейства операторов*

$$\left\{ \frac{k \cdot m!}{(k+m)!} \sum_{j=0}^{m} \frac{(m-j+k-1)!}{(m-j)!\, j!} (-\lambda)^{j+1} R^{(j)}(\lambda) \right\} \ (\lambda > 0,\ m \in \overline{\mathfrak{N}}).$$

3.3.3. Замечание. Необходимость этого условия имеет место для бочечных пространств. Если же вместо условия $H_k = X$ в определении 3.3.1 потребовать эквинепрерывность операторов $C(k, t)$, $t \in (0, 1)$, то теорема справедлива (в обе стороны) без предположения бочечности.

3.3.4. Для случая банахова пространства теорема 3.3.2 может быть без труда переведена на язык резольвенты.

Теорема. *Полугруппа* T *класса* $(0, A)$ *принадлежит классу* Ch_k *в том и только том случае, если для резольвенты ее производящего оператора при некоторых* M *и* ω *выполняются оценки*

$$\left\| \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(m+k-j)!}{(m+1-j)!} \lambda^j R^j(\lambda+\omega, A) \right\| \leqslant \frac{(m+k)!}{m!\, k} M,$$
$$\lambda > 0, \quad m \in \overline{\mathfrak{N}}.$$

В случае $k = 1$, соответствующему известному классу $(0, C_1)$, непосредственно получаем теорему Филлипса — Миядера [7, 11, 13]. Условия в этом случае особенно просты:

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda^j R^j(\lambda+\omega) \right\| \leqslant m \cdot M, \quad \lambda > 0, \quad m \in \mathfrak{N}.$$

§ 4. Сопряженные полугруппы

В этом параграфе изучается наследуемость свойств полугрупп операторов при переходе к сопряженному пространству. Важность сопряженной полугруппы первым обнаружил, по-видимому, Феллер в своей работе о параболических уравнениях [8]. Для полугрупп класса (A) в банаховом пространстве вопрос исследовался Филлипсом [7, 15], для равностепенно непрерывных полугрупп в локально выпуклом пространстве — Коматсу [9].

Схема доказательства Коматсу предполагает наличие удобных условий порождения, которые можно непосредственно переносить на сопряженный к производящему оператору. Это позволяет построить в сопряженном пространстве некую полугруппу, а затем установить ее связь с исходной. Однако не всегда такие условия имеются. Поэтому мы поступим ровно наоборот: *сначала* исследуем сопряженную полугруппу, а *затем* установим связь производящих операторов полученной и исходной полугрупп. Тем самым мы получим возможность исследовать (правда, поступившись изящностью доказательств) более широкие классы полугрупп в более общих ситуациях.

4.1. Предварительные замечания

4.1.1. Пусть $\mathfrak{B}$ означает совокупность всех ограниченных множеств из X. Каждому множеству $B \in \mathfrak{B}$ поставим в соответствие полунорму в X': $p_B(x') = \sup\limits_{x \in B} |\langle x, x' \rangle|$, $x' \in X'$. Для всякой совокупности $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{B}$ топологию, порождаемую семейством полунорм $\{p_B\}$ $(B \in \mathfrak{b})$, обозначим через $\tau_{\mathfrak{b}}$.

4.1.2. Пусть $\{U_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$ — семейство в $L(X)$, причем

$$U[B] \equiv \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha B \in \mathfrak{b}, \quad B \in \mathfrak{b}.$$

Так как $\sup\limits_{\alpha} p_B(U_\alpha^* x') = p_{U[B]}(x')$, то сопряженное семейство $\{U_\alpha^*\}$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$ эквинепрерывно в $L(X', \tau_{\mathfrak{b}})$.

4.1.3. Условие 4.1.2 выполняется, в частности, если семейство $\{U_\alpha\}$ эквинепрерывно, а $\mathfrak{b} = \mathfrak{B}$.

4.1.4. Если $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ — совокупность всех компактных множеств из X, $\mathfrak{A}$ — некоторый компакт, а семейство $\alpha \to U_\alpha$ сильно непрерывно и эквинепрерывно, то сопряженное семейство $\{U_\alpha^*\}$ также эквинепрерывно.

В самом деле, отображение $U: (\alpha, x) \to U_\alpha x$, очевидно, непрерывно, т. е. для всякого компакта $\mathfrak{A} \times B$, $B \in \mathfrak{c}$, имеем

$\bigcup_{\alpha} U_\alpha B = U[\mathfrak{A}\times B] \in \mathfrak{c}$, т. е. и в этом случае выполнено условие 4.1.2.

4.1.5. Пусть A — линейный оператор в X с плотной областью определения, $A^- \in Q(A)$, причем $A^-\mathfrak{b}\subset\mathfrak{b}$ и $\nu(A, A^-)\mathfrak{b}\subset\mathfrak{b}$. Тогда $(A^-)^*\in Q(A^*)$, и $\nu(A^*, A^{-*}) = \nu(A, A^-)^*$.

4.2. Топология ограниченной и компактной сходимости

Всюду в этом пункте $\mathfrak{b}\in\{\mathfrak{B}, \mathfrak{c}\}$. Пространство $(X, \tau_{\mathfrak{b}})$ предполагается секвенциально полным. Желая подчеркнуть, что класс E полугрупп рассматривается в пространстве Y, будем писать $E(Y)$.

4.2.1. Теорема. *Пусть $T\in E(X)$, A — производящий оператор T. Положим*

$$X^+ = \overline{\bigcup_{t>0} T(t)^* D(A^*)},\quad A^+ = A^* \cap X^+\times X^+,$$

$$T^+(t) = T(t)^* \mid X^+.$$

Тогда $T^+\in E(X^+)$ и A^+ — производящий оператор T^+. Если $T\in C_{(k)}(X)$, то $T^+\in C_{(k)}(X^+)$. Если, кроме того, полугруппа T абелевского типа, таковой будет и T^+, и в этом случае $X^+=\overline{D(A^*)}$.

Отображение $T^*: t\to T(t)^*$ удовлетворяет, очевидно, полугрупповому соотношению. Докажем его непрерывность в $(0, \infty)$ на $\overline{D(A^*)}$. Пусть $t>0$, $\Delta=[t-\varepsilon, t+\varepsilon]\subset \boldsymbol{R}^+$ и $A_{h,t}=h^{-1}[T(t+h)-T(h)]$. Учитывая, что $AR(\lambda)\in L(X)$ (здесь R — каноническая квазирезольвента A), для $|h|\in(0, \varepsilon]$, в силу 2.1.6 (а), получаем $p\circ A_{h,t}R(\lambda)\leqslant M_{\Delta,p}\circ AR(\lambda)\in\mathfrak{P}$, $\lambda\in\Pi_\omega$, где $M_{\Delta,p}\equiv \sup\limits_{t\in\Delta} p\circ T(t)\in\mathfrak{P}$. Так как, согласно 2.1.6 (б), $A_{h,t}R(\lambda) \underset{h\to 0}{\to} AT(t)R(\lambda)\equiv A_{0,t}R(\lambda)$, то семейство $\{A_{h,t}R(\lambda)\}$ $(h\in[-\varepsilon, \varepsilon])$ имеет эквинепрерывное сопряженное и для $\mathfrak{b}=\mathfrak{B}$ и для $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ (см. 4.1.3 и 4.1.4), откуда

$$(T^*(t+h) - T^*(t))R^*(\lambda)x' \underset{h\to 0}{\to} 0,\ x'\in X'.$$

Согласно 4.1.5 и 1.1.12, T^* непрерывна на $\mathscr{L}(R^*(\lambda)X' \mid \lambda\in\Pi_\omega) = D(A^*)$, а значит и на $\overline{D(A^*)}$.

Далее, из перестановочности A и $T(t)$ следует $X^+ \subset \overline{D(A^*)}$. Аналогично $T^+(t)$, $R^+(\lambda) \in L(X^+, \tau_b)$, где $R^+(\lambda) = R(\lambda)^* | X^+$. Так как $A^* R^+(\lambda) = (\lambda R^*(\lambda) - I^* + e^{-\lambda} T^*(1)) | X^+$, то $R^+(\lambda) X^+ \subset (A^*)^{-1} X^+ \cap X^+ = D(A^+)$. Итак, R^+ — квазирезольвента A^+ (с остатком $-T^+(1)$).

Покажем, что T^+ — полугруппа класса E. Во-первых,

$$X^+ \supset \overline{X_0(T^+)} \supset \overline{\bigcup_{t>0} T^+(t) \bigcup_{s>0} T^*(s) D(A^*)} = \overline{\bigcup_{t+s>0} T^*(t+s) D(A^*)} = X^+.$$

Во-вторых, непосредственно проверяется включение $R^0_{T^+}(\lambda) | X_0(T^+) \subset R^+(\lambda)$, $\lambda \in \Pi_\omega$ (секвенциальная полнота X' нужна для гарантии включения $X_0(T^+) \subset J(T^+)$). И в-третьих,

$$\bigcap_{\lambda>\omega} R^+(\lambda)^{-1}[0] \subset \bigcap_{\lambda>\omega} (I^+ - e^{-\lambda} T^+(1))^{-1}[0] = \{0\},$$

т. е. $T^+ \in E(X^+)$. В таком случае (см. 2.2.2) R^+ есть квазирезольвента производящего оператора $\tilde{A}$ полугруппы T^+ (с остатком $-T^+(1)$). Так как R^+ является таковой и для A^+, то, в силу 1.1.13, $A^+ = \tilde{A}$.

Теперь, если $T \in C_{(k)}$, то семейство $\{T(t)\Pi_k(\mu)\}$ $(t \in [0, 1])$, а вместе с ним и ему сопряженное — эквинепрерывно (для всякого $\mu \in \Pi^k_\omega$). Отсюда вытекает эквинепрерывность операторов $T^+(t)$, $t \in [0, 1]$, в $L(D((A^+)^k), X^+)$, т. е. $T^+ \in C_{(k)}(X^+)$.

Пусть, наконец, операторы $\lambda R(\lambda)$, $\lambda > \omega$, эквинепрерывны. Тогда из 1.2.2 по теореме Банаха — Штейнгауза получаем $\lambda R(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} I$, т. е. для любой из рассматриваемых топологий семейство $\{\lambda R^*(\lambda)\}$ $(\lambda > \omega)$ эквинепрерывно. Отсюда, как видно из 1.1.6, получаем $\lambda^m R^*(\lambda)^m | \overline{D(A^*)} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} I_{\overline{D(A^*)}}$, т. е. $\overline{D(A^*)} = \overline{D((A^*)^m)}$ для любого $m \in \mathfrak{N}$. Далее, из эквинепрерывности семейств операторов

$$\{A_h R(\lambda) \Pi_k(\mu)\} \ (h \in [0, 1]), \quad (\lambda, \mu) \in \Pi^{k+1}_\omega,$$

вытекает включение $D((A^*)^{k+1})\subset\Sigma(T^*)\equiv\Sigma^*$. Замечая, что $D(A^*)\cap\Sigma^*\subset X^+$, резюмируем полученное выше

$$\overline{D(A^*)}=\overline{D((A^*)^{k+1})}\subset\overline{\Sigma^*\cap D(A^*)}\subset X^+\subset\overline{D(A^*)}.$$

4.2.2. Из доказанной теоремы вытекает, в частности, что в случае $T\in(A)$ и T^+ — полугруппа класса (A) в X^+. Для $\mathfrak{b}=\mathfrak{B}$ (в банаховом пространстве) — это теорема Филлипса [7, 15]. Если же $T\in C_0$, то и $T^+\in C_0(X^+)$; при этом, если T — равностепенно непрерывная полугруппа, то в случае $\mathfrak{b}=\mathfrak{B}$ таковой будет и T^+ (теорема Коматсу [9]).

4.3. Слабая топология

Здесь мы рассмотрим случай, когда $\mathfrak{b}$ — совокупность всех конечных подмножеств X, т. е. $\tau_{\mathfrak{b}}=\sigma$ — слабая топология в X'.

4.3.1. Пусть T — полугруппа в X, A_0 — ее инфинитезимальный оператор (с плотной областью определения). Отметим прежде всего, что отображение $T^*(\cdot)x'$, очевидно, непрерывно для всякого $x'\in X'$, т. е. $T^*:t\to T(t)^*$ — полугруппа[9] в (X',σ). Пусть $\tilde{A}_0$ — инфинитезимальный оператор T^*.

4.3.2. Предложение. *Сопряженная полугруппа всегда имеет производящий оператор* $\tilde{A}\equiv\overline{\tilde{A}_0}$, *причем* $\tilde{A}\subset\subset A_0^*\cap X^+\times X^+$, *где обозначено* $X^+=\overline{\bigcup_{t>0}T^*(t)X'}$.

В самом деле, для $x'\in D(\tilde{A}_0)$ и $x\in D(A_0)$ имеем

$$(A_0x,x')=\lim_{h\to+0}(A_hx,x')=\lim_{h\to+0}\left(x,A_h^*x'\right)=\left(x,\tilde{A}_0x'\right),$$

т. е. $\tilde{A}_0\subset A_0^*$, где A_0^* — σ-замкнутый оператор, и значит, $\tilde{A}_0$ допускает замыкание $\tilde{A}$. Далее, в силу $\Sigma^*\equiv\Sigma(T^*)\subset X^+$, имеем $D(\tilde{A}_0)\subset X^+$ и, следовательно, $R(\tilde{A}_0)\subset\subset X^+$, откуда $\tilde{A}\equiv\overline{\tilde{A}_0}\subset\overline{X^+\times X^+}=X^+\times X^+$.

4.3.3. Предложение. *Пусть T имеет производящий оператор A, и Q_T — совокупность квазиобратных к A, пе-*

---

[9] Для сопряженных полугрупп в этом случае мы снимаем требование локальной эквинепрерывности.

рестановочных с T вместе со своими остатками. Если $I \in \mathscr{L}(A_\lambda A^- \mid (\lambda, A^-) \in \boldsymbol{C} \times Q_T)$, то $\tilde{A} = A^* \cap X^+ \times X^+$.

В силу 4.3.2, достаточно доказать включение $A^* \cap X^+ \times X^+ \equiv A^+ \subset \tilde{A}$. Согласно 2.1.6 (б), имеем $R(T(t)A^-) \subset T(t)D(A) \subset D(A_0)$ для всех $A^- \in Q_T$, $t > 0$. Отсюда, учитывая перестановочность A^- и $T(t)$, получаем

$$A^*(A^-)^* T^*(t) = \lim_{h \to +0} A_h^* T^*(t)(A^-)^* = \tilde{A}_0 (A^-)^* T^*(t).$$ Так

как $A^*(A^-)^* \in L(X', \sigma)$ (см. 4.1.5), то из последнего равенства выводим

$$A^*(A^-)^* \mid X^+ = \tilde{A}(A^-)^* \mid X^+, \ A^- \in Q_T. \qquad (*)$$

Из того, что $(A^-)^* X^+ \subset X^+$ и $A^*(A^-)^* = I^* + \nu(A, A^-)^*: X^+ \to X^+$ вытекает $(A^-)^* \mid X^+ \in Q(A^+)$. В таком случае, согласно 1.1.12, $D(A^+) = \mathscr{L}((A^-)^* X^* \mid A^- \in Q_T)$, т. е. $(*)$ влечет $A^+ \subset \tilde{A}$.

4.3.4. Предположим, что (X', σ) — секвенциально полно.

Теорема. *Пусть $T \in E(X)$, A — производящий оператор T, и $T^+(t) = T^*(t) \mid X^+$, $t > 0$. Тогда $T^+ \in E(X^+)$ и $A^+ \equiv A^* \cap X^+ \times X^+$ — производящий оператор T^+. Если T непрерывна (слабо абсолютно суммируема) в нуле на $D(A^k)$, то и T^+ непрерывна (абсолютно суммируема) в нуле на $D((A^+)^k)$. Если, кроме того, полугруппа T абелевского типа, то $X^+ = X'$ и, следовательно, $A^+ = \tilde{A} = A^*$, $T^+ = T^*$.*

Так как, очевидно, $T^+(t) X^+ \subset X^+$, то T^+ — полугруппа в X^+ и ее производящий оператор, в силу 4.3.2, совпадает с $\tilde{A}$ — производящим оператором T^*. Далее, полугруппа T класса E удовлетворяет, очевидно, всем условиям предложения 4.3.3, т. е. $\tilde{A} = A^+$. Непосредственно проверяется включение $T^+ \in E(X^+)$. Так как условие $D(A^k) \subset \Sigma(T)$ равносильно включениям $R(\Pi_k(\mu)) \subset \Sigma(T)$, $\mu \in \Pi_\omega^k$, то $T^*(t)\,\Pi_k^*(\mu) \underset{t \to +0}{\longrightarrow} \Pi_k^*(\mu)$, откуда $D((A^*)^k) \subset \Sigma(T^*) = \Sigma(T^+)$. Утверждение о суммируемости проверяется аналогично. Наконец, если $\lambda R(\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} I$, то, как легко видеть, $D((A^*)^m) \subset \overline{D((A^*)^{m+1})}$ для всякого $m \in \mathfrak{N}$, откуда $X' = \overline{D((A^*)^k)} \subset \Sigma(T^*) \subset X^+ \subset X'$.

4.4. Некоторые замечания

Метод квазирезольвенты позволяет исследовать и другие вопросы теории полугрупп операторов (аналитичность полугрупп, сходимость последовательностей полугрупп и т. д.). Все вопросы, рассмотренные (или только названные) в этой работе, могут быть поставлены и для *полугрупп-обобщенных функций* [10]. Наконец, можно выяснить, какие полугруппы распространяются до полугрупп-обобщенных функций. Построенный здесь аппарат позволяет успешно исследовать и эти вопросы. Однако сколь-нибудь обстоятельное рассмотрение этих задач в рамках данной работы весьма затруднительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов В. В.** Резольвентная последовательность в вопросах порождения суммируемых полугрупп операторов. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 2, с. 282—285.
2. **Иванов В. В.** n-резольвента и чезаровские классы полугрупп в локально выпуклом пространстве.— В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1974, вып. 14 (31), с. 142—164.
3. **Иванов В. В.** Абсолютная n-резольвента и порождение некоторых классов несуммируемых полугрупп.— В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1974, вып. 15 (32), с. 133—148.
4. **Иванов В. В.** Сопряженные полугруппы операторов в локально выпуклом пространстве.— В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1974, вып. 15 (32), с. 149—153.
5. **Иванов В. В.** Квазирезольвента и полугруппы операторов в локально выпуклом пространстве. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1975, 18 с.
6. **Иосида К.** Функциональный анализ. М., «Мир», 1967. 624 с.
7. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962. 829 с.
8. **Feller W.** The parabolic differential equations and associated semi-groups of transformations.— "Ann. of Math.", 1952, v. 55, N 2.
9. **Komatsu H.** Semi-groups of operators in locally convex spaces.— "J. Math. Soc. Japan", 1964, v. 16, p. 230—262.
10. **Lions J. L.** Les semi-groupes distributions.— "Portugal Math.", 1960, v. 19, p. 141—164.
11. **Miyadera I.** On the generation of a strongly ergodic semi-groups of operators.—„Tohoku Math. J.", 1954, v. 6, N 2, p. 38—52.
12. **Miyadera I.** On the generation of a strongly ergodic semi-groups of operators, II.— "Tohoku Math. I.", 1954, v. 6, N 2, p. 231—254.
13. **Phillips R. S.** An inversion formula for Laplace transforms and semi-groups of linear operators.— "Ann. of Math.", 1954, v. 59.
14. **Phillips R. S.** Semi-groups of operators.— "Bull. Amer. Math. Soc.", 1955, v. 61, p. 16—33.
15. **Phillips R. S.** The adjoint semi-group.— "Pacific J. Math.", 1955, v. 5, p. 269—283.
16. **Widder D. V.** The Laplace transform. Princeton Univ. Press, 1941.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

М. И. Кадец

Теория универсальных нормированных пространств, ведущая начало от классической теоремы Банаха — Мазура об универсальности пространства непрерывных функций $C([0, 1])$, лишь в самое последнее время обогатилась достаточным числом серьезных результатов и приобрела право на существование в качестве самостоятельного раздела геометрической теории нормированных пространств.

Настоящая лекция является, по-видимому, первой попыткой собрать вместе все факты, касающиеся универсальности. В пяти ее параграфах рассмотрены различные модификации понятия универсального пространства и связи между ними. Особо выделена связь между универсальностью и аппроксимационными свойствами банахова пространства. В конце лекции приведены изящные теоремы о «точной» универсальности по отношению к конечномерным пространствам.

Изложение материала в лекции по необходимости краткое. Приводятся лишь определения, результаты и иногда — наброски доказательств. Сформулированы некоторые открытые вопросы.

§ 1. Изометрическая и изоморфная универсальность

1.1. В 1933 г. С. Банах и С. Мазур [1] установили следующее замечательное свойство пространства $C([0, 1])$: каково бы ни было сепарабельное банахово пространство X, в $C([0, 1])$ найдется подпространство, изометричное X. По этому поводу говорят, что пространство $C([0, 1])$ является *изометрически универсальным* элементом в классе всех сепарабельных пространств Банаха. Аналогичным свойством универсальности обладает каждое пространство $C(Q)$, где Q несчетный метрический компакт. Универсальными являются и другие банаховы пространства, существенно отличные от $C(Q)$, например, $A(\mathscr{D})$ (пространство всех функций, аналитических в круге $\mathscr{D}$ и непрерывных вплоть до границы) [2], и пространство Гурария G, о котором мы будем говорить ниже.

1.2. Банахово пространство l_1 также универсально, хотя и в другом смысле. Каково бы ни было сепарабельное банахово пространство X, оно изометрично некоторому фактор-пространству пространства l_1 [1]. Это свойство пространства можно назвать *фактор-универсальностью.*

1.3. Из фактор-универсальности пространства l_1 легко выводится изометрическая универсальность пространства $l_\infty = l_1^*$ в классе всех пространств, сопряженных к сепарабельным. Действительно, каждому фактор-отображению $F: l_1 \to X$ соответствует сопряженное изометрическое вложение $F^*: X^* \to l_\infty$.

1.4. В связи с понятием универсальности естественно возникает ряд вопросов. Например, существует ли изометрически универсальный элемент в классе всех сепарабельных рефлексивных пространств? Изящное отрицательное решение этой и аналогичных задач получил Й. Линденштраус [3]. Приведем набросок его доказательства.

1.5. Лемма. *Пусть банахово пространство X содержит подпространство, изометричное декартову произведению $\{X \times R^1\}_p$ (R^1 — одномерное пространство, $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Тогда X содержит подпространство, изометричное l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ или c_0 $(p = \infty)$.*

1.6. Теорема. *Ни один из перечисленных ниже классов банаховых пространств не содержит изометрического элемента:*

(1) *Все сепарабельные рефлексивные пространства.*

(2) *Все пространства, чьи сопряженные сепарабельны.*

(3) *Все сопряженные сепарабельные пространства.*

(4) *Все сепарабельные существенно нерефлексивные пространства.*

Доказательство проведем, например, для случая (1). Пусть, вопреки утверждению теоремы, пространство X сепарабельно, рефлексивно и содержит изометрически все сепарабельные рефлексивные пространства. Значит, оно содержит подпространство, изометричное $\{X\times R^1\}_1$. Согласно лемме X содержит l_1 и поэтому не рефлексивно. Противоречие.

1.7. В связи с теоремой Линденштрауса представляется целесообразным рассматривать более широкое понятие универсальности — *изоморфную универсальность*. Будем говорить, что банахово пространство E изоморфно универсально по отношению к некоторому классу банаховых пространств $\mathfrak{M}$, если для любого пространства $X\in\mathfrak{M}$ найдется в E подпространство, изоморфное X. Если при этом $E\in\mathfrak{M}$, скажем, что класс $\mathfrak{M}$ содержит изоморфно универсальный элемент.

В. Шленк [4] и П. Войтащик [5] получили результаты, которые можно сформулировать следующим образом.

1.8. Теорема. *Пусть сепарабельное банахово пространство E изоморфно универсально по отношению к классу всех сепарабельных рефлексивных пространств. Тогда E не изоморфно никакому сопряженному пространству, а E^* не сепарабельно.*

1.9. Следствие. *В классах* (1), (2), (3) *нет изоморфно универсального элемента.*

Доказательство теоремы 1.8 проводится следующим образом. Каждому сепарабельному банахову пространству X сопоставляется порядковое число $\alpha=\alpha(X)$, обладающее следующими свойствами:

1) если X изоморфно Y, то $\alpha(X)=\alpha(Y)$;

2) если Y — подпространство X, то $\alpha(X)\geqslant\alpha(Y)$;

3) если X — сопряженное пространство, то $\alpha(X)<<\omega_1$;

4) если X^* сепарабельно, то $\alpha(X)<\omega_1$;

5) для каждого $\alpha<\omega_1$ найдется рефлексивное пространство X такое, что $\alpha(X)\geqslant\alpha$.

Утверждение теоремы вытекает непосредственно из перечисленных свойств инварианта $\alpha(X)$.

1.10. Теорема Шленка — Войтащика порождает ряд новых вопросов. Может ли сепарабельное пространство E, универсальное по отношению к классу всех сепарабельных рефлексивных пространств, быть слабо полным, или свободным от подпространств изоморфных c_0, или от подпространств, изоморфных l_1 и т. п.? Не окажется ли каждое такое E универсальным в классе всех сепарабельных пространств?

1.11. Понятие изоморфно универсального пространства можно уточнить следующим образом. Универсальное банахово пространство E называется *λ-универсальным* по отношению к классу $\mathfrak{M}$, если для каждого $X\in\mathfrak{M}$ найдется подпространство Y такое, что $d(X, Y)\leqslant\lambda$. Если E λ-универсально при любом $\lambda>1$, то оно называется *почти универсальным*. Заметим еще, что 1-универсальность не равносильна изометрической универсальности.

1.12. Теорема. *Если E изоморфно универсально по отношению к классу всех сепарабельных рефлексивных пространств, то оно λ-универсально для некоторого $\lambda<\infty$.*

Доказательство. Допустим противное: существует последовательность сепарабельных рефлексивных пространств X_n такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{d(X_n, Y): Y\subset E\}=\infty.$$

Образуем пространство $X=\{X_1\times X_2\times X_3\times\ldots\}_{l_2}$. Ясно, что X сепарабельно и рефлексивно и

$$\inf\{d(X_n, Y): Y\subset E\}\leqslant\inf\{d(X, Y): Y\subset E\}<\infty$$
$$(n=1, 2, 3, \ldots),$$

что противоречит сделанному допущению.

1.13. Универсальность пространств $C(Q)$ использовалась рядом авторов: в одной из теорем И. М. Гельфанда [6, с. 237] о связи между слабой и сильной непрерывностью абстрактных функций, в теореме А. И. Маркушевича [7] о существовании в сепарабельном банаховом пространстве полной минимальной системы с тотальной сопряженной, в некоторых теоремах об эквивалентных перенормировках и т. п. Однако, в общем, применения универсальности были не очень многочисленными. Это можно объяснить, по крайней мере, двумя обстоятельствами.

1.14. Возьмем двумерное банахово пространство $X=l_1^{(2)}$ и выделим в нем одномерное подпространство Y, натянутое на координатный орт e_1. В силу универсальности пространства $C([0, 1])$ пространство X может быть изометрически вложено в него и притом многими способами. Однако вложение может стать невозможным, если потребовать, чтобы при этом подпространство Y отобразилось на наперед данное подпространство $F\subset C([0, 1])$ (например, если F натянуто на функцию $x(t)=t$). Таково первое обстоятельство, которое можно назвать «*ненаследуемостью универсальности*».

1.15. Второе обстоятельство связано со следующей теоремой А. Пелчинского [8].

Теорема. *Если бесконечномерное подпространство F пространства $C(Q)$ не имеет подпространства, изоморфного c_0, то F не имеет дополнения в $C(Q)$.*

Таким образом, большая часть подпространств лежит в $C(Q)$ без дополнения, что, естественно, осложняет работу с ними. Это обстоятельство можно назвать «*недополняемостью универсальности*».

§ 2. Пространства универсального расположения

В 1966 г. В. И. Гурарий предпринял попытку так изменить понятие универсальности, чтобы устранить осложнения, отмеченные в п. 1.14. Он построил сепарабельное банахово пространство G, названное им пространством почти универсального расположения, обладающее рядом полезных свойств, которых лишено пространство $C(Q)$. Приводимые ниже определения и факты взяты из [9].

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс банаховых пространств; E — банахово пространство и F — его подпространство, принадлежащее $\mathfrak{M}$.

2.1. Определение. Подпространство F называется подпространством *a-универсального расположения* ($a \geqslant 1$) в E относительно $\mathfrak{M}$, если для любой пары пространств H_1 и F_1 (F_1 подпространство H_1, $F_1 \in \mathfrak{M}$, $H_1 \in \mathfrak{M}$, F_1 изоморфно F) и любого изоморфизма $\varphi: F_1 \to F$ найдется в E подпространство H ($F \subset H \subset E$) и изоморфизм $\Phi: H_1 \to H$ такой, что Φ является расширением φ, $\|\Phi\| \leqslant a\|\varphi\|$, $\|\Phi^{-1}\| \leqslant a\|\varphi^{-1}\|$. Если F является подпространством a-универсального расположения при любом $a > 1$ (соответственно при $a = 1$), то будем называть F подпространством *почти универсального* (соответственно *универсального*) *расположения*.

2.2. Определение. Пространство E называется пространством *a-универсального* (соответственно *почти универсального*, *универсального*) расположения относительно $\mathfrak{M}$, если 1) оно a-универсально (соответственно почти универсально, изометрически универсально) относительно $\mathfrak{M}$; 2) любое подпространство $F \subset E$, принадлежащее $\mathfrak{M}$, является подпространством a-универсального (соответственно почти универсального, универсального) расположения в E относительно $\mathfrak{M}$.

Основной результат теории универсальности расположения относится к классу $\mathfrak{M}_f$ всех конечномерных нормированных пространств.

2.3. Теорема. *Существует сепарабельное банахово пространство G почти универсального расположения относительно класса $\mathfrak{M}_f$. Пространство G единственно с точностью до почти изометрии. Не существует сепарабельного банахова пространства универсального расположения относительно $\mathfrak{M}_f$.*

2.4. При доказательстве первой части теоремы 2.3 был впервые применен метод, который впоследствии неоднократно (в различных модификациях) применялся для конструирования различных универсальных пространств. Существенными для этого метода являются два обстоятельства: метрическая компактность некоторых множеств нормированных пространств и отображений и возможность „совмещения вложений", выраженная следующей леммой.

2.5. Лемма. *Пусть X_1 и X_2 банаховы пространства, Y_1 и Y_2 их подпространства, которые изометричны. Тогда найдется банахово пространство Z и подпространство Y такие, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rr, "j_1"] \arrow[dr, "i_1"] & & X_1 \arrow[dr, "h_1"] & \\
& Y \arrow[rr, "j"] & & Z \\
Y_2 \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[rr, "j_2"] & & X_2 \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd} \qquad (h_1X_1 \cap h_2X_2 = jY)$$

Здесь i_1 и i_2 — изометрии, а все операторы j и h — изометрические вложения. Если X_i конечномерны, то и Z можно взять конечномерным.

С помощью этой леммы, начиная с произвольного конечномерного пространства, последовательно „наращивая" его так, чтобы реализовать „почти все" возможные вложения конечномерных пространств друг в друга, получим требуемое пространство G.

2.6. Пространство Гурария обладает рядом дополнительных свойств. Оно является $\mathscr{L}_\infty$-пространством в смысле Линденштрауса — Пелчинского и, следовательно, имеет базис. Пространство G предсопряжено к некоторому $L_1(\mu)$; более того, каждое сепарабельное банахово пространство, предсопряженное к $L_1(\nu)$ (*пространство Линденштрауса*) изометрично дополняемому подпространству пространства G [10]. Наконец, G не изоморфно никакому дополняемому подпространству пространства $C([0, 1])$ [11].

2.7. Неизвестно, существует ли пространство a-универсального расположения в классе всех сепарабельных банаховых пространств. Не существует сепарабельного пространства универсального расположения (без слова „почти") относительно класса $\mathfrak{M}_f$. Доказательство этого факта опирается на теорему Мазура о существовании точек гладкости на сфере сепарабельного банахова пространства.

Пространство Гурария имеет некоторое отношение к известной проблеме Мазура о банаховых пространствах с транзитивной группой изометрий. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

§ 3. Дополняемо универсальные пространства

3.1. Определение. Банахово пространство E называется *дополняемо универсальным* относительно некоторого класса банаховых пространств $\mathfrak{M}$, если для любого $X \in \mathfrak{M}$ найдется в E подпространство X_1, которое изоморфно X и имеет дополнение в E. Если при этом $E \in \mathfrak{M}$, говорят, что E — дополняемо универсальный элемент в $\mathfrak{M}$.

Тривиальные примеры дополняемо универсальных пространств строятся легко: берем все элементы X_α, образующие класс $\mathfrak{M}$, и устраиваем их декартово произведение $X = \{X_\alpha\}_{l_2}$. Очевидно, пространство X будет дополняемо универсальным относительно $\mathfrak{M}$. Более того, вложения здесь изометрические, а дополнения ортогональные.

3.2. Первый „настоящий" пример дополняемо универсального пространства привел А. Пелчинский [12] в 1969 г. Он построил сепарабельное пространство с базисом P, дополняемо универсальное в классе всех пространств с базисом. Это пространство единственно с точностью до изоморфизма.

3.3. В действительности пространство Пелчинского еще более замечательно. Оно содержит нормированный базис $\{e_n\}_1^\infty$, обладающий следующим свойством: если X банахово пространство с полунормированным базисом $\{x_k\}_1^\infty$, то найдется подпоследовательность $\{e_{n_k}\}\subset\{e_n\}$ такая, что соответствие $Tx_k=e_{n_k}$ распространяется до изоморфизма между X и $X_1=[e_{n_k}]$, причем X_1 имеет дополнение — замыкание линейной оболочки остальных членов базиса.

Таким образом, здесь уместнее говорить о дополняемо универсальном базисе. Метод Пелчинского построения универсального базиса сходен отчасти с методом Гурария.

3.4. Этот же метод позволил Пелчинскому построить сепарабельное банахово пространство с безусловным базисом, дополняемо универсальное в классе всех сепарабельных пространств с безусловным базисом. Это пространство P_U также единственно с точностью до изоморфизма и обладает дополняемо универсальным безусловным нормированным базисом.

3.5. Линденштраус [13] обнаружил интересную особенность пространства P_U: оно обладает симметричным базисом (разумеется, отличным от того, на котором реализуется дополняемая универсальность). Более того, P_U обладает несчетным множеством попарно неэквивалентных симметричных базисов.

3.6. М. Цыпин [14] заметил, что пространство P_U можно получить, исходя из пространства P с помощью следующего приема. Пусть по-прежнему $\{e_n\}$ — дополняемо универсальный базис в P. Введем в P новую (более сильную) норму, согласно формуле

$$\|x\|_U=\sup_{|\alpha|\leqslant 1}\left\|\sum\alpha_n a_n e_n\right\| \quad \left(x=\sum a_n e_n\right).$$

Совокупность тех элементов, для которых $\|x\|_U$ конечна, образует, как нетрудно проверить, пространство P_U. С помощью этого метода „усиления нормы" Цыпин установил существование дополняемо универсального базиса в классах всех p-гильбертовых и всех p-бесселевых базисов (при фиксированном p). Напомним, что базис в пространстве Банаха называется *p-гильбертовым* (*p-бесселевым*), если для каждого разложения по этому базису выполнено неравенство $\left\|\sum a_n e_n\right\|^p\leqslant A\sum|a_n|^p$ (соответственно $\sum|a_n|^p\leqslant A\left\|\sum a_n e_n\right\|^p$).

3.7. Отметим еще несколько отрицательных результатов относительно существования дополняемо универсальных базисов. Следующие классы базисов не содержат дополняемо универсального элемента:

а) класс всех натягивающих базисов [12];

б) класс всех ограниченно полных базисов [14];

в) класс всех базисов в слабо полных пространствах [14];

г) класс всех базисов гильбертова пространства [15].

3.8. Наконец, упомянем о теореме, несколько реабилитирующей пространство $C([0, 1])$: в нем есть нормированный базис, универсальный (не дополняемо) в классе всех полунормированных базисов [12].

§ 4. Универсальность и аппроксимационные свойства

4.1. В связи с примером Пелчинского естественно возникает вопрос: существует ли дополняемо универсальное пространство в классе всех банаховых пространств. Отрицательный ответ на этот вопрос означал бы независимое от Энфло отрицательное решение проблемы базиса, положительный — дал бы нам новый пример сепарабельного банахова пространства без базиса (и даже без аппроксимационного свойства).

Напомним некоторые определения и простейшие факты относительно аппроксимационных свойств.

4.2. Определение. Банахово пространство обладает *аппроксимационным свойством* ($X\in AC$), если для каждого компакта $K\subset X$ и каждого $\varepsilon>0$ существует конечномерный линейный оператор T такой, что $\|x-Tx\|<\varepsilon$ для всех $x\in K$.

4.3. Определение. Банахово пространство обладает *ограниченным аппроксимационным свойством* ($X\in OAC$), если для каждого компакта $K\subset X$ существует $c>0$ такое, что каково бы ни было $\varepsilon>0$, найдется конечномерный линейный оператор T с нормой $\|T\|\leqslant c$, для которого $\|x-Tx\|<\varepsilon$ при всех $x\in K$.

Для сепарабельного банахова пространства OAC равносильно существованию последовательности конечномерных линейных операторов, поточечно аппроксимирующей единичный оператор.

4.4. Ясно, что существование базиса влечет наличие *OAC*, а последнее — наличие *AC*. Известно [16], что существует сепарабельное банахово пространство с *AC*, но без *OAC*. Не известно, существует ли пространство с *OAC*, но без базиса.

Кроме вопроса 4.1, можно поставить, по крайней мере, два аналогичных вопроса.

4.5. Существует ли дополняемо универсальное пространство в классе всех сепарабельных пространств с *OAC*?

4.6. Существует ли дополняемо универсальное пространство в классе всех сепарабельных пространств с *AC*?

4.7. В заметке [17] М. И. Кадец предложил новый способ построения дополняемо универсальных пространств (также родственный методу Гурария). Он построил сепарабельное пространство E, дополняемо универсальное по отношению ко всем сепарабельным пространствам с *OAC*, но не сумел доказать, что оно само обладает ограниченным аппроксимационным свойством. Это установили Войтащик и Пелчинский [18]. Затем Пелчинский доказал, что E изоморфно пространству $\boldsymbol{P}$, которое таким образом оказалось дополняемо универсальным и в классе всех сепарабельных пространств с *OAC* [19].

4.8. Этот факт был установлен с помощью следующей теоремы: каждое сепарабельное банахово пространство с *OAC* погружается изоморфно и с дополнением в некоторое пространство с базисом.

4.9. Теорема 4.8 имеет полезный конечномерный аналог: для любых n и ε найдется $N=N(n, \varepsilon)$ такое, что для каждого n-мерного банахова пространства X найдется N-мерное надпространство Y с „почти монотонным" базисом $\{y_i\}_1^N$ $\left(\left\|\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i y_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i y_i\right\|\right.$ для любых коэффициентов λ_i и любого $m \leqslant N$), допускающее проектор с единичной нормой на X. В частности, можно положить $\varepsilon=n^{-1/2}$, $N=n^2$.

4.10. С помощью метода, предложенного в [17], были построены дополняемо универсальные пространства в классе всех сепарабельных предсопряженных к L_1 [18] и в классе всех сепарабельных $\mathscr{L}_\infty$-пространств [20].

4.11. Интересный и, по-видимому, важный пример построил В. Джонсон [21]. Воспроизведем его конструкцию. Пусть $\{X_n\}_1^\infty$ счетное множество конечномерных нормированных пространств, плотное в смысле дистанции Банаха — Мазура в классе всех конечномерных банаховых пространств. Образуем бесконечное декартово произведение этих пространств: $C_1=\{X_1\times X_2\times X_3\times\ldots\}_{l_1}$. Заметим, что в C_1 есть базис; это устанавливается с помощью теоремы 4.9. Используя тонкие соображения, связанные с неметрической компактностью, Джонсон показал, что сопряженное пространство C_1^* дополняемо универсально в классе всех банаховых пространств, сопряженных к сепарабельным пространствам (сравните с 1.2—1.3). Следствием дополняемой универсальности пространства C_1^* является следующее предложение.

4.12. Теорема. *Пространство C_1^* не обладает аппроксимационным свойством.*

Действительно, пусть E сепарабельное банахово пространство без аппроксимационного свойства (например, пространство Энфло). Тогда по одной теореме Гротендика E^* также не имеет аппроксимационного свойства. Так как E^* изоморфно и с дополнением погружается в C_1^*, то последнее также не имеет AC.

§ 5. Изометрическая универсальность относительно классов конечномерных пространств

5.1. Отвечая на вопрос Мазура (проблема 41 из „Шотландской книги“), Ч. Бессага [22] установил, что никакое конечномерное банахово пространство не является изометрически универсальным по отношению к классу $\mathfrak{M}_2$ всех двумерных нормированных пространств. Более точно

5.2. Теорема. *Никакое n-мерное пространство не является изометрически универсальным по отношению к тем двумерным пространствам, чьи единичные сферы суть $(2n+2)$-угольники* ($n=3, 4, \ldots$). Этот результат точен.

Доказательство теоремы 5.2 опирается на некоторые свойства отображений, удовлетворяющих условию Липшица.

5.3. Линденштраус [23] показал, что изометрически универсальным относительно $\mathfrak{M}_2$ является пространство

$L_1([0, 1])$. Заметим, что ни l_1, ни c_0 не являются таковыми.

5.4. Наконец, А. Шанковский построил для каждого натурального n сепарабельное пространство $\mathfrak{X}_n$, изоморфное гильбертову, в которое каждое n-мерное банахово пространство вкладывается изометрически и с ортогональным дополнением [24].

Конструкция Шанковского является непосредственной, не опирающейся ни на какие сколько-нибудь серьезные факты. Интересной ее особенностью является использование „не выпуклых норм".

ЛИТЕРАТУРА

1. **Banach S., Mazur S.** Zur theorie der linearen dimension.—„Studia math.", 1933, v. 4, p. 100—112.
2. **Pelczynski A.** On simultaneous extension of continuous functions.—„Studia math.", 1964, v. 24, p. 285—304.
3. **Lindenstrauss Y.** Notes on Klee's paper Polyhedral sections of convex bodies.—„Israel J. Math.", 1966, v. 4, p. 235—242.
4. **Szlenk W.** The non-existance of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces.—„Studia math.", 1968, v. 30, p. 53—61.
5. **Wojtaszczyk P.** On separable Banach Spaces containing all separable reflexive Banach spaces.—„Studia math.", 1971, v. 37, p. 197—202.
6. **Gelfand I. M.** Abstrakte functionen und lineare operatoren.— «Мат. сб.», 1938, т. 4 (46), с. 235—286.
7. **Маркушевич А. И.** О базисе в широком смысле слова.— «Докл. АН СССР», 1943, т. 43, с. 241—243.
8. **Pelczynski A.** Projections in certain Banach spaces.—„Studia math.", 1960, v. 19, p. 209—228.
9. **Гурарий В. И.** Пространства универсального расположения, изотропные пространства и проблема Мазура о вращении банаховых пространств.— «Сиб. мат. журн.», 1966, т. 7, с. 1002—1013.
10. **Wojtaszczyk P.** Some remarks on Gurarij space.— "Studia math.", 1972, v. 41, p. 208—210.
11. **Benyamini Y., Lindenstrauss J.** A predual of l_1 which is not isomorphic to a $C(K)$ space.—„Israel J. Math.", 1972, v. 13, p. 246—254.
12. **Pelczynski A.** Universal bases.— "Studia math.", 1968, v. 32, p. 53—61.
13. **Lindenstrauss Y.** A remark on symmetric bases.—„Israel J. Math.", 1972, v. 13, p. 317—320.
14. **Zippin M.** Existence of universal members in certain families of bases of Banach spaces.— "Proc. Amer. Math. Soc.", 1970, v. 26, p. 294—301.

15. **Гурарий В. И.** Некоторые теоремы о базисах в гильбертовом и банаховом пространствах.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 193, с. 974—977.
16. **Figiel T., Johnson W. B.** The approximation property does not imply the lounded approximation property.—„Proc. Amer. Math. Soc.", 1973, v. 41, p. 197—200.
17. **Kadec M. I.** On complementably universal Banach spaces.— „Studia math.", 1971, v. 40, p. 85—89.
18. **Pelczynski A., Wojtaszczyk P.** Banach spaces with finite dimensional expansions of identity and universal bases.— „Studia math.", 1971, v. 40, p. 91—108.
19. **Pelczynski A.** Any separable space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis.— "Studia math.", 1971, v. 40, p. 239—243.
20. **Nielsen M. J., Wojtaszczyk P.** A remark on bases in $\mathcal{L}_p$-spaces with an application to complementable universal $\mathcal{L}_p$-spaces.— „Bull. Acad. polon. sci. Sér. math., astronom., phys.", 1973, v. 21, p. 249—254.
21. **Johnson W. B.** A complementary universal conjugate Banach space and its relations to the approximation problem.—„Israel J. Math.", 1972, v. 13, p. 301—310.
22. **Bessaga C.** A note on universal Banach spaces of finite dimension.—„Bull. Acad. polon. sci. Sér. math., astronom., phys.", 1958, v. 6, p. 97—101.
23. **Lindenstrauss J.** On the extension of operators with a finite dimensional range.—„Illinois J. Math.", 1964, v. 8, p. 488—499.
24. **Szankowski A.** An example of a universal Banach space.—„Israel J. Math.", 1972, v. 11, p. 292—296.

ОПЕРАТОРЫ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

М. А. Красносельский, А. В. Покровский

1. Необходимость учитывать гистерезисные эффекты раньше всего, по-видимому, возникла в теории магнетизма и теории пластичности (библиографию см., например, в [1—3]). В настоящее время термин „гистерезис“ часто встречается в словаре инженеров, биологов и других специалистов. При самом поверхностном рассмотрении работ, связанных с гистерезисом, становится ясно, что часто речь идет о совершенно различных явлениях как с формальной, так и с содержательной точки зрения.

Наиболее обычна следующая ситуация.

Рассматривается преобразователь W со скалярными входом u и выходом x. Предполагается, что на вход подается синусоидальный сигнал частоты ω и при этом выходной сигнал после процесса установления становится периодическим с частотой ω, так что зависимость между входом и выходом описывается замкнутой кривой в плоскости $\{u, x\}$. Эту кривую называют *петлей гистерезиса*. Приведенное определение говорит о том, как меняется выходной сигнал после процесса установления, конечно, при синусоидальном входе.

Часто гистерезисную нелинейность трактуют как многозначную функцию, указывая закон выбора той ветви ее, по которой нужно двигаться, когда входной сигнал меняется монотонно и непрерывно. Здесь уже речь идет об изменениях выходной величины при непрерывных кусочно монотонных управлениях.

2. Упомянутые выше представления о гистерезисных нелинейностях недостаточны по следующим причинам.

Во-первых, при изучении процессов в замкнутых системах, содержащих в качестве одного из элементов преобразователь с гистерезисной нелинейностью, как правило, отсутствует априорная информация о таких свойствах входного сигнала, как периодичность или кусочная монотонность. Поэтому описание гистерезисных нелинейностей должно строиться так, чтобы оно было применимо к возможно более широким классам входных сигналов (лучше всего — к сигналам, образующим какое-либо полное функциональное пространство).

Во-вторых, описание гистерезисных нелинейностей должно быть таким, чтобы включение гистерезисных нелинейностей в дифференциальные, интегральные и другие уравнения не мешало применению строгих математических методов в качественном анализе уравнений, позволяло приближенно решать эти уравнения, применять для их решения методы математического моделирования.

В-третьих, описание гистерезисных нелинейностей должно предусматривать возможность учета изменения их характеристик в процессе работы замкнутой системы. Примером может служить изменение характеристик пластических тел при их нагревании.

В-четвертых (и это наиболее важно в ряде задач), описание гистерезисных нелинейностей должно быть приспособлено к решению проблем идентификации нелинейных преобразователей. Иначе говоря, нужно уметь по общим свойствам преобразователя и по известным реакциям преобразователя на некоторый тестовый набор входных сигналов определять „тип" гистерезисной нелинейности и уметь находить ее параметры с нужной точностью.

3. Попытку развить точку зрения на гистерезисные нелинейности, удовлетворяющую перечисленным в предыдущем пункте требованиям, предприняла в последние годы группа московских и воронежских математиков и механиков. Большой вклад в работу, в частности, внесли Б. М. Даринский, И. В. Емелин, П. П. Забрейко, В. С. Козякин, Е. А. Лифшиц и В. Б. Привальский. Направление исследований определялось в основном следующими простыми идеями.

1) Трактовать гистерезисную нелинейность как оператор на возможно более широком классе входов; такая точка зрения впервые систематически проводилась, по-видимому, В. А. Якубовичем [4]. При этом возможность аналитического описания оператора не должна играть почти никакой роли. Важны лишь возможно более полные адекватность феноменологических представлений о нелиней-

ности (если такие представления есть), информация о свойствах оператора и ее применимость для анализа соответствующих уравнений и их приближенного решения.

II) Отказаться от попытки описывать все то, что называют „гистерезисом", единой математической моделью.

III) Выделить элементарные носители свойств гистерезиса — „атомы гистерезисных нелинейностей" — и провести полный анализ возникающих при их описании операторов.

IV) Описывать сложные гистерезисные нелинейности как блок-схемы с элементарными нелинейностями. При этом могут быть использованы и „континуальные блок-схемы", охватывающие операции, аналогичные обычному и мультипликативному интегрированию.

V) Развивать теорию уравнений, в которые входят гистерезисные нелинейности, трактуемые как соответствующие операторы, и разработать методы приближенного решения таких уравнений.

VI) Выделить качественные характеристики преобразователя, которые позволяют определить, к какому классу гистерезисных нелинейностей этот преобразователь относится.

4. Ниже излагаются (в основном без доказательств) некоторые полученные результаты. Основная цель статьи заключается в том, чтобы описать общее состояние вопроса.

§ 1. Элементарные гистерезисные нелинейности

1.1. Основные определения

В этом параграфе изучаются свойства трех важных преобразователей. Эти преобразователи обладают естественными физическими свойствами. Все они статические, управляемые [5] и, самое главное, выход $x(t)$ преобразователя при $t \geqslant t_0$ однозначно определяется входом $u(t)$ при $t \geqslant t_0$ и значением x_0 выхода в начальный момент t_0. Такие преобразователи ниже называются *гистеронами*. Состояние гистерона удобно рассматривать как точку $\{u_0, x_0\}$ плоскости, принадлежащую некоторому множеству Ω *допустимых состояний*. Выход $x(t)$ $(t \geqslant t_0)$, соответствующий начальному состоянию $\{u_0, x_0\}$ и допустимому входу $u(t)$ $(u(t_0)=u_0)$, естественно рассматривать как результат применения к $u(t)$ некоторого оператора $W[t_0, x_0]$. При этом, конечно, должно выполняться полугрупповое равенство

$$W[t_0, x_0]u(t)=W[t_1, W[t_0, x_0]u(t_1)]u(t) \quad (t_0\leqslant t_1\leqslant t). \quad (1)$$

С математической точки зрения описание преобразователя — гистерона заключается в определении множества Ω допустимых состояний и семейства операторов $W[t_0, x_0]$, удовлетворяющих равенству (1).

1.2. Гистерон первого рода

1.2.1. Пусть область Ω допустимых состояний имеет следующую структуру (рис. 1). При каждом u_0 пересечение $\omega(u_0)$ области Ω с прямой $u=u_0$ является точкой или непустым промежутком; этот промежуток может быть открытым, полуоткрытым или замкнутым. Подмножество Ω, состоящее из внутренних точек промежутков $\omega(u)$ $(-\infty<u<\infty)$, обозначим через Ω_0. Пусть множество Ω_0 покрыто графиками непрерывных функций $\varphi_\alpha(u)$, причем каждая из функций $\varphi_\alpha(u)$ определена на замкнутом промежутке $[a_\alpha, b_\alpha]$ и $\{u, \varphi_\alpha(u)\}\in\Omega_0$ при $u\in(a_\alpha, b_\alpha)$. Можно показать, что при сделанных предположениях концевые точки промежутков $\omega(u)$ образуют объединение графиков двух непрерывных функций: $\Gamma_l(u)$ и $\Gamma_r(u)$, причем вырожденные промежутки $\omega(u)$ принадлежат обоим графикам, и левый (соответственно правый) конец каждой „внутренней“ кривой лежит на графике функции $\Gamma_l(u)$ (функции $\Gamma_r(u)$). Функция $\Gamma_l(u)$ $(\Gamma_r(u))$

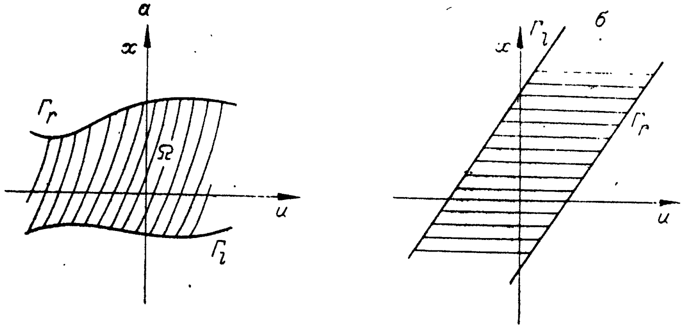

Рис. 1.

определена на всей оси или полубесконечном промежутке $-\infty < u < u_r$ $(u_l < u < \infty)$.

В этой ситуации можно описать общую конструкцию операторов $W[t_0, x_0]$, сопоставляющих с широким классом входов $u(t)$ выходные сигналы $x(t)$. Пусть начальное состояние не лежит на $\Gamma_l \setminus \Gamma_r$, а вход $u(t)$ монотонно возрастает. Тогда непрерывный выход определяется так, чтобы переменное состояние $\{u(t), x(t)\}$ $(t \geqslant t_0)$ сначала „ползло" по проходящей через точку $\{u_0, x_0\}$ „внутренней" кривой, а затем по графику функции $\Gamma_r(u)$. Если же начальное состояние лежит в множестве $\Gamma_l \setminus \Gamma_r$, то соответствующий выход можно определить с помощью предельного перехода, законность которого легко обосновать. Аналогично определяется выход, соответствующий монотонно убывающему входу $u(t)$ (при этом кривые Γ_l и Γ_r меняются ролями). Выход $x(t)$, соответствующий кусочно монотонному управлению, определяется при помощи полугруппового равенства (1).

1.2.2. Описанная конструкция ничего не говорит о том, какие выходы соответствуют произвольным непрерывным входам. Ее нужно дополнить предельной конструкцией, которая возможна в силу следующего, справедливого без каких-либо дополнительных предположений, утверждения.

Теорема 1. *Оператор $W[t_0, x_0]$ допускает продолжение по непрерывности на множество непрерывных входов $u(t)$, удовлетворяющих условию $\{u(t_0), x_0\} \in \Omega$* [1].

Сохраним за продолженным оператором обозначение $W[t_0, x_0]$. Преобразователь W, работа которого описывается операторами $W[t_0, x_0]$, называется гистероном первого рода (или, если это не ведет к недоразумению, просто гистероном). Если все отрезки $\omega(u)$ вырождены, то W — это, конечно, преобразователь суперпозиции, действие которого описывается равенством $x(t) = \Gamma[u(t)]$ $(\Gamma(u)$ — скалярная функция).

Гистероны возникают в самых различных приложениях. Например, гистерон, график которого изображен на рис. 1, *б*,— это нелинейность типа „люфт". Нова, по-видимому, лишь та точка зрения на эти нелинейности, которая приводит к операторам, заданным на всех непрерывных входах.

[1]) Предполагается, конечно, что множества входных и выходных сигналов наделены топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах полуоси $[t_0, \infty)$.

1.2.3. Введенная элементарная гистерезисная нелинейность — гистерон — обладает интересными свойствами. Отметим четыре таких свойства. Эти свойства отражают физические особенности гистеронов и, с другой стороны, полезны при анализе систем с гистерезисом методами функционального анализа.

I) Пусть последовательность непрерывных входов $u_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ равномерно на $[t_0, \infty]$ сходится к ограниченному входу $u_0(t)$. Пусть числа x_n $(\{u_n(t_0), x_n\}\in\Omega)$ сходятся к x_0 $(\{u_0(t_0), x_0\}\in\Omega)$. Тогда функции $W[t_0, x_0]u_n(t)$ равномерно на $[t_0, \infty)$ сходятся к $W[t_0, x_0]u_0(t)$.

Это важное свойство естественно назвать устойчивостью по отношению к шумам малой амплитуды.

II) Пусть функции $\Gamma_l(u)$ и $\Gamma_r(u)$ определены при всех u и удовлетворяют локальному условию Липшица. Пусть все функции $\varphi_\alpha(u)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{du}=f(u, x), \tag{2}$$

причем функция $f(u, x)$ удовлетворяет по x локальному условию Липшица. Тогда преобразователь W удовлетворяет следующему условию Липшица:

$$\begin{gathered}|W[t_0, x_0]u_0(t)-W[t_0, x_1]u_1(t)|\leqslant\\ \leqslant L[\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}|u_0(\tau)|, \max_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}|u_1(\tau)|]\{|x_0-x_1|+\\ \max_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}|u_0(\tau)-u_1(\tau)|\}.\end{gathered} \tag{3}$$

III) Преобразователь-гистерон часто обладает полезными свойствами типа свойства монотонности. Пусть для определенности все гистерезисные петли обходятся против хода часовой стрелки (т. е. $\Gamma_l(u)\geqslant\Gamma_r(u)$ и все функции $\Gamma_l(u)$, $\Gamma_r(u)$, $\varphi_\alpha(u)$ не убывают). Тогда из соотношений

$$\begin{gathered}u_0(t)\leqslant u_1(t) \quad (t\geqslant t_0),\ u_0(t_0)=u_1(t_0),\\ x_0\leqslant x_1,\ \{u_0(t_0), x_0\}\in\Omega,\ \{u_1(t_0), x_1\}\in\Omega\end{gathered} \tag{4}$$

вытекает неравенство

$$W[t_0, x_0]u_0(t)\leqslant W[t_0, x_1]u_1(t) \quad (t\geqslant t_0). \tag{5}$$

IV) Пусть вход $u(t)$ $(t\geqslant t_0)$ периодический с периодом T. Тогда выход $x(t)$ также периодический с периодом T при $t>t_0+T$.

1.2.4. Естествен вопрос о „внутреннем“ описании класса преобразователей, которые являются гистеронами первого рода. Полученный ответ вначале казался неожиданным.

Теорема 2. *Пусть W-преобразователь-гистерон с непустым множеством Ω допустимых состояний. Пусть операторы $W[t_0, x_0]$ определены на всех непрерывных входах, удовлетворяющих соотношению $\{u(t_0), x_0\}\in\Omega$. Пусть, наконец, преобразователь W устойчив по отношению к шумам малой амплитуды. Тогда преобразователь W является гистероном первого рода.*

Устойчивость преобразователя по отношению к шумам из определенного класса может быть проверена экспериментально. Поэтому теорема 2 позволяет решить вопрос об идентификации важного класса преобразователей (или, по крайней мере, облегчает решение этого вопроса).

1.3. Гистерон Маделунга

1.3.1. Пусть заданы два гистерона первого рода W_1 и W_2 с одной и той же областью Ω допустимых состояний и одинаковыми функциями $\Gamma_l(u)$ и $\Gamma_r(u)$ (рис. 2). Рассмотрим преобразователь M с областью Ω допустимых состояний, выход которого при монотонно возрастающем входе совпадает с выходом гистерона W_1, а при монотонно убывающем входе — с выходом гистерона W_2. Выход преобразователя M, соответствующий кусочно монотонному входу, определяется полугрупповым равенством.

Описанный преобразователь — это, по существу, модель Маделунга гистерезисной нелинейности [6].

1.3.2. Естественно желание поступить как в п. 1.2.2 и продолжить операторы $M[t_0, x_0]$ с кусочно монотонных

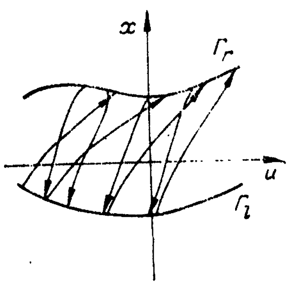

Рис. 2.

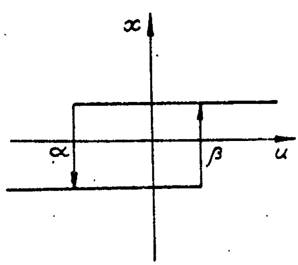

Рис. 3.

на любые непрерывные входы, воспользовавшись предельным переходом. В силу теоремы 2 это можно сделать только в том случае, если преобразователи W_1 и W_2 совпадают. Во многих ситуациях все же можно операторы $M[t_0, x_0]$ естественным образом расширить до операторов, действующих в достаточно богатом функциональном пространстве.

Пусть $S[t_0]$ — пространство функций, первые производные которых суммируемы на каждом конечном промежутке $[t_0, t_1]$. Естественным образом определяется сходимость в $S[t_0]$; кусочно монотонные функции образуют в $S[t_0]$ плотное множество.

Теорема 3. *Пусть функции $\Gamma_l(u)$ и $\Gamma_r(u)$ определены при всех и и удовлетворяют локальному условию Липшица. Пусть внутренние кривые гистеронов W_1 и W_2 являются траекториями двух дифференциальных уравнений вида* (2), *правые части которых удовлетворяют по x локальному условию Липшица. Тогда каждый оператор $M[t_0, x_0]$ можно доопределить до непрерывного оператора, определенного на всех входах $u(t)\in S[t_0]$, удовлетворяющих соотношению $\{u(t_0), x_0\}\in\Omega$.*

Сохраним за продолженными операторами обозначение $M[t_0, x_0]$. Определенный этими операторами преобразователь M будем называть *гистероном второго рода* или *гистероном Маделунга.*

1.3.3. Отметим два специфических свойства гистерона Маделунга (ср. п. 1.2.3).

I) Гистерон Маделунга в естественном смысле устойчив по отношению к шумам малой энергии.

II) Пусть $\Gamma_l(u)\geqslant\Gamma_r(u)$ и все кривые, участвующие в определении гистерона M, являются графиками неубывающих функций. Пусть для любой точки $\{u_0, x_0\}\in\Omega$ „внутренняя“ кривая гистерона W_1, проходящая через эту точку, лежит в области $u\geqslant u_0$ не выше, чем „внутренняя“ кривая гистерона W_2, проходящая через ту же точку. Тогда из соотношений (4) вытекает неравенство $M[t_0, x_0]u_0(t)\leqslant M[t_0, x_1]u_1(t)$.

1.4. Преобразователь реле

Пусть $R=R(\alpha, \beta)$ — обычное реле с током включения β и током отключения α. Выход реле при кусочно монотонном входе ясен из рис. 3. Преобразователь реле детально изучен в [7]. Реле, конечно, не является устойчивым по отношению к шумам из какого-либо естественного класса.

Если иметь в виду возможность анализа сложных систем, то полезно распространить соответствующие операторы на более широкие классы входов. Это можно сделать, например, следующим образом. Пусть $L(t_0)$ — множество измеримых и локально ограниченных при $t \geqslant t_0$ входов. Для каждого входа $u(t) \in L(t_0)$ обозначим через $A[u(t)]$ множество непрерывных кусочно монотонных входов $v(t)$, которые почти всюду удовлетворяют неравенству $v(t) \leqslant u(t)$. Положим

$$R[t_0, x_0]u(t) = \sup\{R[t_0, y]v(t) : y \leqslant x_0,\ v(t) \in A[u(t)],\ \{v(t_0), y\} \in \Omega\}.$$

Каждый из расширенных таким образом операторов $R[t_0, x_0]$ действует в пространстве $L(t_0)$ и монотонен относительно конуса неотрицательных функций; кроме того, каждый оператор $R[t_0, x_0]$ разрывен лишь в точках, образующих в $L(t_0)$ тощее (т. е. первой категории по Бэру) множество.

Конечно, описанное „продолжение" преобразователя-реле не единственно возможное. Выбор какого-то определенного „продолжения" должен определяться спецификой задачи.

1.5. *Переменные гистероны*

1.5.1. Описанные преобразователи приспособлены для описания объектов, свойства которых не меняются во времени. Подобная идеализация недопустима, например, при анализе зависимостей между деформациями $u(t)$ нагреваемого упруго-пластического тела и возникающими при этом напряжениями $x(t)$. В таких случаях удобно понятие переменного гистерона.

Проще всего определить гистерон, меняющийся во времени, как семейство W_t обычных гистеронов, характеристики которых зависят от t как от параметра. Такое определение, конечно, недостаточно, так как оно не содержит рецепта определения по входу $u(t)$ выходного сигнала $x(t)$. Для построения такого рецепта можно во пользоваться, например, следующей конструкцией типа мультипликативного интеграла.

Рассмотрим при каждом $t \geqslant t_0$ разбиение $\varkappa$ промежутка $[t_0, t]$ на части $[t_{i-1}, t_i]$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ t_n=t)$ и определим значение $\widetilde{W}[t_0, x_0, \varkappa]u(t)$ вспомогательного оператора рекуррентными формулами

$$\widetilde{W}[t_0, x_0, \varkappa]\, u(t_i) = W_{\xi_i}[\, t_{i-1}, \ \widetilde{W}[t_0, x_0, \varkappa]\, u(t_{i-1})\,]\, u(t_i), \tag{6}$$

где $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Затем можно положить

$$\widetilde{W}[t_0, x_0]u(t) = \lim_{\max|t_i - t_{i-1}| \to 0} \widetilde{W}[t_0, x_0, \varkappa]u(t). \tag{7}$$

Основная трудность заключается в доказательстве существования предела (7).

1.5.2. Пусть, например, W_t — это семейство гистеронов первого рода, определенных функциями $\Gamma_l(u, t)$, $\Gamma_r(u, t)$, $\varphi_\alpha(u, t)$. Будем считать, что функции $\varphi_\alpha(u, t)$ удовлетворяют при каждом t дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{du} = f(u, x, t).$$

Теорема 4. *Пусть функции* $\Gamma_l(u, t)$ *и* $\Gamma_r(u, t)$ *непрерывны по совокупности переменных и определены при всех* u. *Пусть существуют вторые производные* $f''_{tx}(u, x, t)$ *и* $f''_{xx}(u, x, t)$. *Тогда при каждом непрерывном входе* $u(t)$ *существует предел* (7).

В условиях теоремы 4 *переменный гистерон первого рода* обладает основными свойствами обычного гистерона. В частности, переменный гистерон первого рода виброустойчив.

1.5.3. Опишем одну конструкцию, которая была использована при доказательстве теоремы 3.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varphi[t, x, u(t)]\, u'(t) + \psi[t, x, u(t)], \tag{8}$$

правая часть которого зависит от управления $u(t)$. Через $K[t_0, x_0]u(t)$ обозначим решение задачи Коши $x(t_0) = x_0$ для уравнения (8). Уравнение (8) назовем *виброустойчивым*, если для каждой последовательности гладких управлений $u_n(t)$, равномерно сходящихся к непрерывному управлению $u_0(t)$, и любых чисел t_0, x_0 последовательность $K[t_0, x_0]u_n(t)$ сходится равномерно на каждом конечном промежутке к некоторой непрерывной функции.

Как оказывается, для виброустойчивости уравнения (8) достаточно, чтобы существовали непрерывные производные $\psi''_x(t, x, u)$, $\varphi''_{tx}(t, x, u)$, $\varphi''_{xx}(t, x, u)$. Для виброустойчивого уравнения естественно определены его обобщенные решения при всех непрерывных управлениях.

Уравнение (8) часто встречается в теории стохастических дифференциальных уравнений. Отметим, что „виброустойчивые" решения этого уравнения отличаются от известных решений Ито. „Виброустойчивые" решения часто совпадают с решениями Стратановича, однако, в отличие от решений Ито и Стратановича, они определены для любого непрерывного управления $u(t)$.

§ 2. Блок-схемы

2.1. Введение

Для описания многих сложных гистерезисных нелинейностей можно применять различные блок-схемы из гистеронов или из гистеронов и других привычных преобразователей (коэффициентов, суперпозиций, интеграторов и т. д.). Отметим, что выходной сигнал $x(t)$ блок-схемы, как правило, уже не определяется начальным выходом $x(t_0)$ и входным сигналом $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$. В этом смысле блок-схемы с гистеронами являются сложными преобразователями, „помнящими" предысторию входного сигнала.

2.2. Блок-схемы из гистеронов первого рода

2.2.1. Наиболее просты и, может быть, поэтому наиболее употребительны модели гистерезисных нелинейностей, основанные на построении блок-схем из параллельно соединенных гистеронов. Континуальный аналог таких блок-схем приводит к гистерезисным нелинейностям вида

$$G[t_0, x_0(\alpha)]\,u(t) = \int\limits_A \lambda(\alpha)\, W[t_0, x_0(\alpha); \alpha]\, u(t)\, d\mu. \qquad (9)$$

Здесь A — множество с мерой μ, $W(\alpha)$ $(\alpha \in A)$ — семейство гистеронов, $\lambda(\alpha)$ — скалярная функция. Начальное состояние $x_0(\alpha)$ является измеримой функцией, удовлетворяющей условию $\{u(t), x_0(\alpha)\} \in \Omega(\alpha)$. Нужно, конечно, проследить за измеримостью подынтегральной функции при всех t. Обычно это сделать нетрудно.

По существу, нелинейности типа (9) с конечным множеством рассматривал Бесселинг [8], а с континуальным — А. Ю. Ишлинский [9, 10] и другие авторы в связи с описанием зависимостей между деформациями и напряжениями в упруго-пластических средах.

Представление (9) — это спектральное разложение сложной гистерезисной нелинейности по элементарным. Такое разложение, конечно, неединственно. Однако если задаться специальными классами гистеронов и вводить различные нормирующие условия, то можно получить и некоторые теоремы единственности.

2.2.2. Основные свойства оператора (9) (устойчивость по отношению к шумам малой амплитуды, монотонность и др.) легко вытекают из соответствующих свойств гистеронов $W(\alpha)$. Особо отметим два таких свойства.

I) Пусть входной сигнал $u(t)$ является T-периодическим при $t \geqslant t_*$. Тогда выход $x(t)$ будет T-периодическим при $t \geqslant t_* + T$. Это свойство полезно для идентификации преобразователей (9) среди других блок-схем из гистеронов. Если блок-схема содержит участки последовательного соединения, то T-периодическому входу отвечает выход, который становится T-периодическим с момента $t_* + kT$ (k — целое число, зависящее от структуры блок-схемы).

II) Допустим, что на вход нелинейности (9) при различных начальных состояниях подаются два управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые совпадают, начиная с некоторого момента t_*, с функцией $A \sin(\omega t) + B$. Им соответствуют две гистерезисные петли. Эти гистерезисные петли будут, вообще говоря, различными. Однако справедливо следующее простое утверждение.

Теорема 5. *При каждом фиксированном и вертикальные хорды имеют одинаковую длину.*

Из этого принципа равных хорд и из принципа Кавальери вытекает, что площади указанных двух петель гистерезиса одинаковы. Последнее свойство часто имеет простой физический смысл и предъявляется как категорическое требование к моделям гистерезиса.

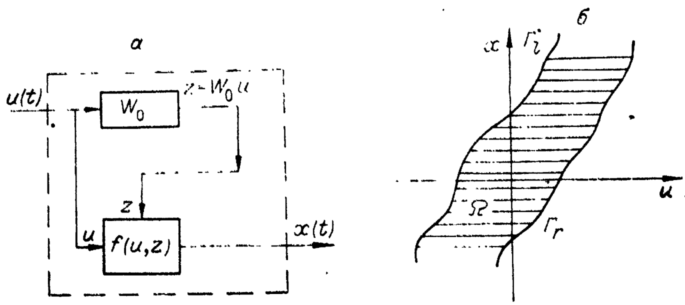

Рис. 4.

2.2.3. Блок-схемы могут быть использованы и для представления одних гистеронов через другие — более простые. Блок-схема, показанная на рис. 4, *а*, при любом гистероне W_0 и любой непрерывной на соответствующей области Ω функции $f(u, x)$ также является гистероном W. Назовем эту схему *каноническим представлением гистерона* W, если гистерон W_0 имеет вид, показанный на рис. 4, *б*, т. е., если кривые $\Gamma_l(u)$ и $\Gamma_r(u)$ являются графиками неубывающих функций, а внутренние кривые горизонтальны.

Следующее простое утверждение часто оказывается полезным.

Теорема 6. *Каждый гистерон первого рода имеет каноническое представление.*

Каноническое представление, конечно, не единственно. Многие качественные свойства гистерона становятся геометрически наглядными, если считать, что гистерон задан в каноническом виде.

2.3. Блок-схемы из реле

2.3.1. Ограничимся системами параллельно соединенных реле и континуальными аналогами таких систем. Для описания соответствующих операторов удобно с каждым реле $R(\alpha, \beta)$ сопоставить точку $\{\alpha, \beta\}$ в полуплоскости Π, выделенной неравенством $\alpha \leqslant \beta$. Тогда каждое множество различных реле изобразится как некоторое подмножество $D \subset \Pi$. Состояниями системы реле удобно считать характеристические функции $x_0(\alpha, \beta)$ подмножеств $E \subset D$. Операторы $R[t_0, x_0(\alpha, \beta)]$, отвечающие системе параллельно соединенных реле с возможными дополнительными коэффициентами, определяется равенствами

$$R\,[t_0, x_0(\alpha, \beta)]\,u(t) = \int\limits_D \lambda(\alpha, \beta) R\,[t_0, x_0, (\alpha, \beta); \alpha, \beta]\,u(t)\,d\mu, \tag{10}$$

где μ — некоторая мера на D.

Представления (10) гистерезисных нелинейностей были введены, по существу, еще Прейсахом [11] при описании гистерезисных петель. Более полно представления (10) были использованы Гилтаем при построении общей теории ферромагнетиков. Легко указать внутренние качественные характеристики преобразователя, позволяющие утверждать, что соответствующие операторы могут быть записаны в виде (10).

2.3.2. Многие свойства преобразователя (10) просто определяются по свойствам соответствующей меры μ. Для упрощения формулировок будем считать, что $\lambda(\alpha, \beta) \equiv 1$.

Представление (10) — это спектральное разложение сложного нелинейного оператора по более простым разрывным операторам. Несмотря на это, преобразователь (10) может оказаться устойчивым по отношению к шумам малой амплитуды, т. е. соответствующие операторы (10) могут быть непрерывными операторами, действующими в пространстве непрерывных функций. Сформулируем это утверждение более точно.

Множество $\Gamma \subset \Pi$ назовем *направленным*, если для любых двух точек $\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2\} \in \Gamma$ выполнено неравенство $(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \geqslant 0$.

Теорема 7. *Операторы* (10) *являются непрерывными в пространстве непрерывных функций в том и только том случае, если равна нулю мера каждого множества, которое становится направленным после поворота на* 90°.

Интересен и вопрос о том, может ли преобразователь (10) быть гистероном.

Теорема 8. *Преобразователь* (10) *является гистероном в том и только том случае, если носитель меры является направленным множеством, мера пересечения которого с каждой горизонтальной или вертикальной прямой равна нулю.*

Очевидно, любой гистерон типа, показанного на рис. 4, *б*, может быть представлен в виде последовательного соединения гистерона, являющегося системой реле и преобразователя суперпозиции $z=f(x)$. Поэтому теорема 1 вытекает из теорем 7 и 8.

2.4. Моделирование и идеализация

2.4.1. При исследовании систем, содержащих преобразователи с гистерезисом, с успехом применяются аналоговые и гибридные устройства. При этом для моделирования гистерезисных нелинейностей (если не говорить о натуральном моделировании) применяют специальные блоки; такие блоки описаны в ряде работ (см., например, [13—14]). Входно-выходные соответствия на этих блоках обычно несколько отличаются от тех, которые моделируются. Поэтому математический анализ работы моделирующих блоков представляет большой интерес.

Построение моделирующих блоков и их математический анализ — это задача в определенном смысле обратная проблеме идентификации. Действительно, в задачах идентификации мы исходим из реальных преобразователей и ищем их математическую идеализацию. В задачах моделирования положение обратное — при заданной математической идеализации нужно найти такие реальные (просто реализуемые и пригодные для эксплуатации в заданных условиях) преобразователи, „хорошей" идеализацией которых является заданный математический оператор. Математический анализ работы моделирующего блока в идеале должен заключаться не только в описании класса входных сигналов, при которых выходной сигнал моделирующего блока „близок" (с качественными и количественными оценками) значению моделируемого оператора, но и в указании класса шумов, по отношению к которым модель устойчива (корректна).

Характеристики моделирующих блоков обычно зависят от различных параметров (сопротивлений, емкостей, индуктивностей и т. д.), которые меняются в определенных пределах. Анализ модели заключается в первую очередь в исследовании зависимости выходных сигналов от параметров. При этом моделируемому оператору отвечают предельные значения параметров, которые не могут быть реализованы. Модель особенно хороша, если при соответствующих близких к предельным значениям параметров

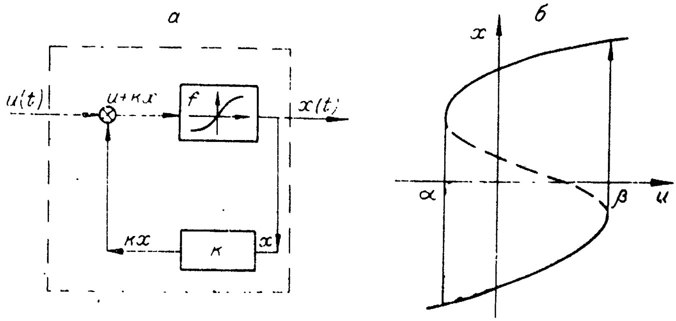

Рис. 5.

она аппроксимирует значения моделируемого оператора с заданной точностью на всем пространстве рассматриваемых входов. При анализе ряда блоков, указанных в [15], мы столкнулись с отсутствием подобной равномерной аппроксимации при стремлении значений параметров к предельным; однако при таком стремлении имеет место сильная сходимость к значениям моделируемого оператора.

2.4.2. Упомянем об одном известном классе моделей релейных нелинейностей. Их можно моделировать блок-схемами R, аналогичными указанной на рис. 5. Математически выход является многозначной функцией (ее график указан на рис. 5, *б*). Однако, если при описании работы блок-схемы учесть конечную скорость передачи сигнала в каждом элементе блок-схемы, то мы получим не функциональную зависимость между входом $u(t)$ и выходом $x(t)$, а дифференциальное или разностное уравнение для определения $x(t)$, в правую часть которого $u(t)$ входит как управление. График 5, *б* дает координаты состояний равновесия этого уравнения при управлениях-константах, причем состояния равновесия, показанные сплошной кривой, асимптотически устойчивы, а штриховой — неустойчивы. Поэтому при медленно меняющихся $u(t)$ блок работает как реле.

Описанная схема встречается во многих задачах математики и многих приложениях. Эта схема хорошо объясняет различные явления теории катастроф, привлекающей в последние годы внимание специалистов различных областей науки.

§ 3. Уравнения с гистерезисными нелинейностями

3.1. Основные свойства

Результаты § 1 и 2 позволяют исследовать дифференциальные и интегральные уравнения, в которые входят как равноправные члены операторы гистерезисных нелинейностей.

Обычные задачи для соответствующих уравнений (задача Коши, задача о периодических и почти периодических решениях и т. д.) стандартными методами сводятся к операторным уравнениям, для исследования которых применим весь арсенал современного нелинейного анализа. На этом пути доказаны (пока, к сожалению, лишь в сравнительно простых ситуациях) некоторые теоремы о разрешимости задачи Коши, найдены условия единственности ее решений и условия их нелокальной продолжимости, указаны условия существования периодических и почти периодических решений, выяснены условия применимости методов Н. Н. Боголюбова — Ю. А. Митропольского усреднения правых частей и т. д.

3.2. Уравнения с разрывными нелинейностями

3.2.1. Специфические эффекты возникают при изучении уравнений с гистерезисными разрывными нелинейностями. Примером такой нелинейности может служить конечная система R параллельно соединенных реле $R(\alpha_i, \beta_i)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ с коэффициентами $\mu_i \geqslant 0$. Состояние такой системы характеризуется N-мерным вектором a, каждая компонента которого равна нулю или единице. Как обычно, соответствующие операторы будем обозначать через $R[t_0, a_0]$.

Рассмотрим систему, динамика которой при $t \geqslant t_0$ описывается уравнением

$$L(p)x = M(p)f\{t, x, R[t_0, a_0]x(t)\}. \tag{11}$$

Здесь $L(p)$ и $M(p)$ — дифференциальные операторы, причем $\deg L > \deg M$; функция $f(t, x, y)$ измерима, ограничена, периодична по t и монотонна по x и y. Нас будет интересовать вопрос, есть ли у уравнения (11) T-периодические решения, т. е. вопрос, существует ли при каком-нибудь a_0 T-периодическая функция $x_*(t)$, удовлетворяющая (11) при $t \geqslant t_0$. На примере этой задачи достаточно отчетливо видны и трудности, возникающие при изучении систем, содержащих разрывные нелинейности и возможные пути их преодоления.

3.2.2. Во многих ситуациях физически реализуемыми являются лишь такие T-периодические решения уравнения (11), что для каждой системы реле R', достаточно близкой к R, уравнение

$$L(p)x = M(p)f\{t, x, R'[t_0, a_0]x(t)\}$$

имеет T-периодическое решение, близкое к $x_*(t)$. При этом система реле R' должна считаться близкой к R, если числа α'_i, β'_i и μ'^i близки соответственно к числам α_i, β_i и μ_i. Подчеркнем, что выходы близких систем реле могут при некоторых входах быть существенно различными. Решения $x_*(t)$, обладающие описанным свойством корректности, назовем *правильными*.

Теорема 9. *Пусть функция Грина $G(t, s)$ T-периодической задачи для уравнения $L(p)x = M(p)\varphi(t)$ положительна. Пусть уравнение (11) имеет при каждом a_0 не более чем счетное число T-периодических решений. Тогда уравнение (11) имеет, по крайней мере, одно правильное T-периодическое решение.*

3.2.3. Теорему 9 нужно дополнить пригодными для фактических вычислений на ЭВМ методами приближенного построения правильных решений. Ниже описывается один из таких методов.

Пусть a_0 — некоторое состояние системы реле R, а $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ — входной сигнал. Через $a(t)$ и $x(t)$ обозначим соответствующие переменное состояние и выход системы R. Рассмотрим оператор $A(\varepsilon)$, переводящий пару $\{a_0, u(t)\}$ в пару $\{b_0, v(t)\}$, где

$$b_0 = a(T), \quad v(t) = \int_0^T G(t, s) f[t + t_0, u(s), x(s)]\, ds + \varepsilon.$$

Зафиксируем убывающую и стремящуюся к нулю последовательность чисел σ_j. Через A_j будем обозначать оператор $A[(-1)^j\sigma_j]$. Построим последовательность пар

$\{a_j, u_j(t)\}$ по следующему правилу. В качестве a_0 выберем вектор с единичными компонентами, а в качестве $u_0(t)$ возьмем настолько большую функцию, что вторая компонента пары $A_1\{a_0, u_0(t)\}$ не превосходит $u_0(t)$.

Если уже найдена пара $\{a_{j-1}, u_{j-1}(t)\}$, то определим пару $\{a_j, u_j(t)\}$ как первую пару в последовательности

$$\{b_\nu, v_\nu(t)\}=A_j\{b_{\nu-1}, v_{\nu-1}(t)\};\ b_0=a_{j-1},\ v_0(t)=u_{j-1}(t),$$

для которой справедливы соотношения

$$a_\nu=a_{\nu+1},\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|v_{\nu+1}(t)-v_\nu(t)|\leqslant\sigma_j-\sigma_{j+2}.$$

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы* 9. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) Элементы последовательности $\{a_j, u_j(t)\}$ *могут быть найдены при каждом* j; *при этом справедливы неравенства*:

$$u_1(t)\leqslant u_3(t)\leqslant\ldots\leqslant u_{2k+1}(t)\leqslant\ldots$$
$$\ldots\leqslant u_{2k}(t)\leqslant\ldots\leqslant u_2(t)\leqslant u_0(t),$$
$$a_1\leqslant a_3\leqslant\ldots\leqslant a_{2k+1}\leqslant\ldots$$
$$\ldots\leqslant a_{2k}\leqslant\ldots\leqslant a_2\leqslant a_0.$$

б) Последовательности $u_{2k+1}(t)$ *и* $u_{2k}(t)$ *сходятся к одной и той же функции* $u_*(t)$; *все векторы* a_j *с достаточно большими номерами совпадают с некоторым вектором* a_*.

в) T*-периодическая функция* $x_*(t)$, *определенная равенством* $x_*(t_0+t)=u_*(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$, *удовлетворяет уравнению* (11) *при начальном состоянии* a_* *и является правильным решением уравнения* (11).

3.2.4. Метод, аналогичный описанному, часто позволяет находить периодические режимы в системах, содержащих континуальные системы из реле или гистеронов. Особую роль при этом играют гистероны, обладающие свойствами монотонности, описанными в п. 1.2.3 и 1.3.3.

Теория правильных решений полезна и при анализе обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными нелинейностями. В этом случае она позволяет находить периодические режимы без участков скольжения, обладающие естественными свойствами корректности.

Изложенные результаты, опубликованные в работах [16—26], облегчают анализ систем с некоторыми классами гистерезисных нелинейностей. Интересной задачей нелинейного анализа является пересмотр с современных позиций разных общих конструкций гистерезисных нелинейностей. Вероятно, важно возможно более глубоко изучить возникающие при этом операторы — лишь достаточно полная теория позволит в дальнейшем решить трудные задачи. При этом основной проблемой, конечно, является решение конкретных задач в теории систем с гистерезисом.

Авторы благодарны В. А. Якубовичу за интерес, проявленный к работе, и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сорокин Е. С.** К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., Стройиздат, 1960.
2. **Bouc R.** Modéle mathématique d'hystérésis. Application aux systémes à un degré de liberté. Thése. Marseille, CNRS, A0, 1969, p. 30—78.
3. **Березовский А. А., Нижник Л. Г.** Математические модели гистерезиса.— В кн.: Труды 5-й Международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 4. Киев, АН УССР, 1970, с. 68.
4. **Якубович В. А.** Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. 3. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями.— «АиТ», 1965, т. 26, № 5, с. 753—763.
5. **Заде Л., Дезоер Ч.** Теория линейных систем. М., «Наука», 1970, 703 с.
6. **Madelung E.** Über magnetisierung durch schnellverlaufende ströme und die wirkungsweise des rutherford — marconischen magnetdetektors.— "Annalen der Physik", 1905, v. 17, N 5, p. 861.
7. **Цыпкин Я. З.** Релейные автоматические системы. М., «Наука», 1974.
8. **Besseling J. F.** A theory of elastic, plastic and creep deformations of an initialy isotropic material showing anisotropic strain-hardening, creep recovery and secondari creep.— "J. Appl. Mech.", 1958, v. 25, p. 529.
9. **Ишлинский А. Ю.** Некоторые применения статистики к описанию законов деформации тел.— «Изв. АН СССР. ОТН», 1944, № 3, с. 583.
10. **Ишлинский А. Ю.** Общая теория пластичности с линейным упрочнением.— «Укр. мат. журн.», 1954, т. 6, № 3, с. 314.
11. **Preisach F.** Über die magnetische Nachwirkung.—"Zeitschrift für Physik", 1935, v. 94, N 5, 6, p. 277.
12. **Giltay J.** On ferromagnetic states.— "Appl. Sci. Res.", B2, 1951, p. 199.
13. **Корн Т., Корн Г.** Электронные моделирующие устройства. М., ИЛ, 1955. 311 с.

14. **Коган Б. Я.** Электронные моделирующие устройства и их применения для исследования систем автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1963. 512 с.
15. **Нетушил А. В.** Автоколебания в системах с отрицательным гистерезисом.— В кн.: Труды 5-й Международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 4. Киев, АН УССР, 1970, с. 393.
16. **Красносельский М. А., Даринский Б. М., Лифшиц Е. А., Емелин И. В., Забрейко П. П., Покровский А. В.** Оператор-гистерант— «Докл. АН СССР», 1970, т. 190, № 1, с. 34—37.
17. **Забрейко П. П., Красносельский М. А., Лифшиц Е. А.** Осциллятор на упруго-пластическом элементе.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 190, № 2, с. 266—268.
18. **Красносельский М. А.** Математическое описание колебаний материальной точки на упруго-пластическом элементе.— В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. М., «Наука», 1970, с. 146—149.
19. **Красносельский М. А., Покровский А. В.** Виброустойчивость решений дифференциальных уравнений.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 195, № 3, с. 544—547.
20. **Красносельский М. А., Покровский А. В.** Системы гистеронов.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 200, № 2, с. 286—289.
21. **Козякин В. С., Красносельский М. А., Покровский А. В.** Виброустойчивые гистероны.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 206, № 4, с. 800—803.
22. **Козякин В. С.** О виброустойчивости дифференциальных уравнений второго порядка.— «Усп. мат. наук», 1972, т. 27, № 5, с. 241—242.
23. **Красносельский М. А., Покровский А. В.** Виброустойчивые дифференциальные уравнения с непрерывной правой частью.— В кн.: Тр. Московского математического общества. М., «Наука», 1972, т. 27, с. 93—112.
24. **Покровский А. В.** Нелокальная продолжимость решений виброустойчивых дифференциальных уравнений.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 6, с. 1286—1289.
25. **Покровский А. В.** К теории гистерезисных нелинейностей.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 210, № 6, с. 1284—1287.
26. **Красносельский М. А., Покровский А. В.** Периодические колебания в системах с релейными нелинейностями.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 216, № 4, с. 733—735.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

С. Г. Крейн

В настоящей статье дается описание схемы, по которой строятся пространства, промежуточные между банаховым пространством и областью определения действующего в нем неограниченного линейного оператора. В приложениях этот оператор обычно является дифференциальным (или псевдодифференциальным), поэтому принадлежность функции его области определения говорит об ее определенной гладкости. Задача о построении промежуточных пространств связана с нахождением пространств функций, обладающих промежуточной гладкостью.

Рассмотрим в банаховом пространстве E замкнутый неограниченный линейный оператор A с плотной в E областью определения $\mathscr{D}(A)$. Если на множестве $\mathscr{D}(A)$ ввести норму графика

$$\|x\|_{E_A} = \|x\|_E + \|Ax\|_E,$$

то оно превращается в банахово пространство, обозначаемое через E_A. Построению промежуточных пространств между E и E_A помогает наличие в пространстве E *сглаживающего аппроксимационного процесса*, т. е. коммутативного семейства ограниченных линейных операторов $Q_t (0<t<\infty)$, обладающего свойствами:

1) операторы Q_t сильно непрерывны по t, равномерно по t ограничены на $(0, \infty)$:

$$\|Q_t x\|_E \leqslant M \|x\|_E \tag{1}$$

и сильно сходятся при $t \to 0$ к единичному оператору I;

2) при каждом t оператор Q_t отображает E в $\mathscr{D}(A)$ (сглаживает) и коммутирует с A на $\mathscr{D}(A)$.

Введем в рассмотрение операторы $S_t = AQ_t$. Из свойств 1) и 2) вытекает, что при $x \in \mathscr{D}(A)$

$$\| S_t x \|_E = \| Q_t Ax \|_E \leqslant M \| Ax \|_E \leqslant M \| x \|_{E_A}. \qquad (2)$$

Кроме того, при всяком $t > 0$ оператор S_t ограничен. Действительно, он замкнут как произведение замкнутого оператора на ограниченный и определен во всем пространстве. Отметим, что если оператор A не является ограниченным, то функция $\|S_t\|_E$ не может быть ограниченной вблизи нуля. Действительно, из неравенства $\|S_t\| \leqslant K$ при $0 < t \leqslant a$ следовало бы неравенство $\|AQ_t x\|_E \leqslant K \|x\|_E$. Далее, $AQ_t x = Q_t Ax \to Ax$ на $\mathscr{D}(A)$, поэтому операторы AQ_t были бы равномерно ограниченными и сходились бы на плотном множестве $\mathscr{D}(A)$ к оператору A. По теореме Банаха — Штейнгауза оператор A был бы ограниченным.

Обозначим через $\rho(t)$ какую-либо положительную возрастающую непрерывную функцию, для которой

$$\|\rho(t) S_t\|_E \leqslant 1 \quad (0 < t < \infty). \qquad (3)$$

Из сказанного выше следует, что $\rho(t) \to 0$ при $t \to 0$. Более того, $\rho(t) S_t x \to 0$ при любом $x \in E$. Действительно, при $x \in \mathscr{D}(A)$ это следует из 2) и предыдущего, а так как $\mathscr{D}(A)$ плотно в E и операторы $\rho(t) S_t$ равномерно ограничены, то это будет и при любом $x \in E$.

Для элементов из $\mathscr{D}(A)$ в силу (2)

$$\sup \|S_t x\|_E < \infty. \qquad (4)$$

Поставим вопрос об описании всех элементов x, для которых справедливо неравенство (4). Для этого введем понятие *относительного пополнения*. Если банахово пространство E_1 вложено в банахово пространство E_0, то пополнением E_{01} пространства E_1 относительно E_0 называется совокупность всех $x \in E_0$, для которых существуют такие последовательности $x_n \in E_1$, что $x_n \to x$ в E_0 и $\| x \|_{E_1} \leqslant R$. Если через $\|x\|_{E_{01}}$ обозначить $\inf R$, то в этой норме E_{01} становится банаховым пространством.

Оказывается, что *совокупность элементов $x \in E$, обладающих свойством (4), совпадает с пополнением E_{0A} пространства E_A относительно E.*

Действительно, если $x \in E_{0A}$, то, как нетрудно показать, существует такая последовательность $x_n \in E_A$, что $x_n \to x$ в E и $\| x_n \|_{E_A} = \| x \|_{E_{0A}}$. Неравенство (2) тогда влечет за собой неравенство $\|S_t x_n\|_E \leqslant M\|x_n\|_{E_A} = M\|x\|_{E_{0A}}$. Пользуясь ограниченностью в E оператора S_t, получаем

$$\|S_t x\|_E \leqslant M\|x\|_{E_{0A}}, \text{ т.е. } \sup\|S_t x\|_E \leqslant M\|x\|_{E_{0A}} < \infty.$$

Обратно, если выполнено (4), то $Q_t x \to x$ в E и $\|Q_t x\|_{E_A} = \|Q_t x\|_E + \|AQ_t x\|_E \leqslant M\|x\|_E + \sup\|S_t x\|_E$. Отсюда вытекает, что $x \in E_{0A}$ и $\|x\|_{E_{A0}} \leqslant M\|x\|_E + \sup\|S_t x\|_E$. Утверждение доказано.

Так как всегда $\|x\|_E \leqslant \|x\|_{E_{A0}}$ $(x \in E_{0A})$, то из доказательства получается неравенство

$$C_1(\|x\|_E + \sup\|S_t x\|_E) \leqslant \|x\|_{E_{0A}} \leqslant C_2(\|x\|_E + \sup\|S_t x\|_E). \tag{5}$$

Понятие относительного пополнения было введено Е. Гальярдо [1]. Связь между ним и поведением аппроксимационных процессов рассматривалась Г. Беренсом [2].

Множество E_A является замкнутым в E_{0A}. Действительно, пусть $x_n \in E_A$ и $x_n \to x$ в E_{0A}. Тогда в силу неравенств (5) $x_n \to x$ в E и $S_t x_n \to S_t x$ в E равномерно по t. Для произвольного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n и m имеем $\|S_t x_n - S_t x_m\|_E < \varepsilon$ для всех $t > 0$. Отсюда $\|Q_t(Ax_n - Ax_m)\|_E < \varepsilon$. Переходя к пределу при $t \to 0$, из 1) получаем, что $\|Ax_n - Ax_m\|_E < \varepsilon$. В силу замкнутости оператора A из последнего неравенства и из того, что $x_n \to x$ следует, что $x \in \mathscr{D}(A) = E_A$, что и требовалось доказать.

Из доказанного вытекает, что на множестве $\mathscr{D}(A)$ нормы $\|x\|_E + \|Ax\|_E$ и $\|x\|_E + \sup\|S_t x\|_E$ эквивалентны.

Отметим, что в силу общих соображений пространства E_A и E_{0A} совпадают, если E_A рефлексивно [1].

Сглаживающий аппроксимационный процесс позволяет поставить в соответствие каждому элементу $x \in E$ скалярную функцию $\|S_t x\|_E$ на полуоси $(0, \infty)$. Из предыдущего вытекает, что пространство E_{0A} состоит из всех тех элементов, для которых эта функция принадлежит пространству $L^\infty(0, \infty)$. Рассмотрение других функциональных пространств на полуоси приводит к возможности построения других пространств, промежуточных между E_A и E.

Банахово пространство $F(0, \infty)$ измеримых функций (классов) на полуоси называется *идеальной структурой* (или банаховой решеткой, или функциональным банаховым пространством), если из того, что $f \in F$ и $|g(t)| \leqslant$

$\leqslant |f(t)|$ при почти всех $t \in (0, \infty)$, следует, что $g \in F$ и $\|g\|_F \leqslant \|f\|_F$.

Пусть $F(0, \infty)$ идеальная структура. По определению полагаем $x \in E_{A,F}$, если $\|S_t x\|_E \in F(0, \infty)$. Множество $E_{A,F}$ линейно. В нем вводится норма

$$\|x\|_{E_{A,F}} = \|x\|_E + \|\|S_t x\|_E\|_F. \qquad (6)$$

Относительно этой нормы пространство $E_{A,F}$ — банахово.

Очевидно, что $\|x\|_{E_{A,F}} \geqslant \|x\|_E$ и, следовательно, пространство $E_{A,F}$ вложено в пространство E.

Предположим, что F обладает еще свойством:

а) функция $\min\{1, \rho^{-1}(t)\}$ принадлежит F.

В силу неравенства $\min\{M, \rho^{-1}(t)\} \leqslant \max\{1, M\} \times \min\{1, \rho^{-1}(t)\}$ функция $\min\{M, \rho^{-1}(t)\} \in F$ при любом $M > 0$. Далее, если через $\chi_e(t)$ обозначать характеристическую функцию множества e, то при $a > 0$ выполняется $\chi_{(0, a]}(t) \leqslant \rho(a) \min\{\rho^{-1}(a), \rho^{-1}(t)\} \in F$ и $\rho^{-1}(t)\chi_{(a, \infty)}(t) \leqslant \min\{\rho^{-1}(a), \rho^{-1}(t)\} \in F$.

При выполнении условия а) пространство E_A вложено в пространство $E_{A,F}$ и, следовательно, *пространство $E_{A,F}$ является промежуточным между пространствами E_A и E.*

Действительно, из (2) и (3) следует, что $\|S_t x\|_E \leqslant \min\{M, \rho^{-1}(t)\}\|x\|_{E_A}$. Откуда, в силу условия а),

$$\|x\|_{E_{A,F}} = \|\|S_t x\|_E\|_F \leqslant \|\min\{M, \rho^{-1}(t)\}\|_F \|x\|_{E_A} < \infty.$$

Операторы Q_s отображают E в E_A, поэтому они действуют в пространстве $E_{A,F}$. Более того, они в нем равномерно ограничены:

$$\|Q_s x\|_{E_{A,F}} = \|Q_s x\|_E + \|\|S_t Q_s x\|_E\|_F = \|Q_s x\|_E + \\ + \|\|Q_s S_t x\|_E\|_F \leqslant M\|x\|_{E_{A,F}}. \qquad (7)$$

Говорят, что идеальная структура F обладает *абсолютно непрерывной нормой*, если для любых $f \in F$ и убывающей последовательности измеримых множеств e_n с пустым пересечением $\|\chi_{e_n} f\|_F \to 0$ при $n \to \infty$.

Если F обладает свойством а) и имеет абсолютно непрерывную норму, то E_A плотно в $E_{A,F}$.

Действительно, пусть $x \in E_{A,F}$. Пользуясь (3) и (7), оцениваем

$$\|x - Q_s x\|_{E_{A,F}} \leqslant \|\chi_{(0,\delta]} \| S_t (x - Q_s x) \|_E \|_F +$$
$$+ \|\chi_{(\delta,\infty)} \| S_t (x - Q_s x) \|_E \|_F + \|x - Q_s x\|_E \leqslant$$
$$\leqslant (M+1) \|\chi_{(0,\delta]} \| S_t x \|_E \|_F + (\|\chi_{(\delta,\infty)} \rho^{-1}\|_F + 1) \|x - Q_s x\|_E.$$

Благодаря абсолютной непрерывности нормы в пространстве F, первый член справа может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора малого δ, а затем второй член — за счет выбора малого s. Таким образом, $Q_s x \to x$ в $E_{A,F}$ и $Q_s x \in E_A$. Пространство E_A плотно в $E_{A,F}$.

Для приложений важно выяснить вопрос о том, обладают ли построенные промежуточные пространства интерполяционными свойствами относительно пространств E и E_A.

Напомним, в двух словах, как строятся интерполяционные пространства по методу констант[1]. Мы сразу будем говорить о пространствах E и E_A. Рассматриваются две идеальные структуры F_0 и F_1 функций на полуоси. Выделяются те элементы x из E, которые представимы в виде $x = u_0(t) + u_1(t)$, где $\|u_0(t)\|_E \in F_0$ и $\|u_1(t)\|_{E_A} \in F_1$. Совокупность таких элементов обозначается через $(E, E_A)^K_{F_0,F_1}$. Если в ней ввести норму по формуле

$$\|x\|_{(E,E_A)^K_{F_0,F_1}} = \inf_{x = u_0(t) + u_1(t)} (\| \|u_0(t)\|_E \|_{F_0} + \| \|u_1(t)\|_{E_A} \|_{F_1}),$$

то она становится банаховым пространством. Нетрудно проверяется, что пространство $(E, E_A)^K_{F_0,F_1}$ обладает интерполяционным свойством относительно пространств E и E_A.

За пространство F_1 примем пространство F, введенное ранее, а за F_0 примем пространство $F_{\rho^{-1}}$, являющееся пространством F с весом $\rho^{-1}(t)$ (норма $\|f\|_{F_{\rho^{-1}}} = \|\rho^{-1} f\|_F$).

Оказывается, что *пространство* $(E, E_A)^K_{F_{\rho^{-1}},F}$ *вложено в пространство* $E_{A,F}$.

Действительно, для $x \in (E, E_A)^K_{F_{\rho^{-1}},F}$ существует представление $x = u_0(t) + u_1(t)$, где $\|u_0(t)\|_E \in F_{\rho^{-1}}$ и $\|u_1(t)\|_{E_A}$

---

[1] Метод констант возник в работах Ж. Л. Лионса и Ж. Петре [3], [4]; здесь он применяется в том виде, который разработан В. И. Дмитриевым [5].

$\in F$. Тогда $S_t x = S_t u_0(t) + S_t u_1(t)$. В силу (2) и (3) имеем $\|S_t u_0(t)\|_E \leqslant \rho^{-1}(t)\|u_0(t)\|_E \in F$ и $\|S_t u_1(t)\|_E \leqslant M\|u_1(t)\|_{E_A} \in F$.

Отсюда $\|S_t x\|_E \leqslant \|S_t u_0(t)\|_E + \|S_t u_1(t)\|_E \in F$. Из полученных неравенств следует, что $x \in E_{A,F}$ и

$$\|x\|_{E_{A,F}} \leqslant C\|x\|_{(E,E_A)^K_{F_{\rho^{-1}},F}}.$$

Полученное утверждение с точки зрения теории аппроксимации принадлежит к утверждению типа классической теоремы Джексона: описывается пространство, на котором процесс S_t ведет себя определенным образом ($\|S_t x\|_E \in F$), при этом конструкция пространства не связана с самим процессом. Обратные утверждения, в которых из определенного поведения процесса S_t делается заключение о принадлежности элемента x некоторому пространству, являются аналогами классической теоремы Бернштейна. Для получения таких теорем требуется наложить более тесные связи на оператор A и процесс Q_t или, что то же, на процессы S_t и Q_t.

В известных нам примерах для операторов S_t и Q_t выполнено соотношение вида

$$I = \int_0^1 \rho(\lambda t)\mathscr{L}(\lambda, t) S_{\lambda t}\, d\alpha(\lambda) + \int_\delta^1 Q_{\lambda t} N(\lambda, t)\, d\beta(\lambda), \tag{8}$$

где $\mathscr{L}(\lambda, t)$ и $N(\lambda, t)$ — равномерно ограниченные по λ и t операторнозначные функции, коммутирующие с S_τ и Q_τ при всех $\tau > 0$; $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ — ограниченные возрастающие скалярные функции на $[0, 1]$ и $[\delta, 1]$ $(0 < \delta \leqslant 1)$ соответственно.

Предположим, что для $t \in (0, a]$ справедливо соотношение (8), тогда для любого $x \in E$ и $t \in (0, a]$

$$x = \int_0^1 \rho(\lambda t)\mathscr{L}(\lambda, t) S_{\lambda t} x\, d\alpha(\lambda) + \int_\delta^1 Q_{\lambda t} N(\lambda, t)\, x\, d\beta(\lambda). \tag{9}$$

Пусть $x \in E_A$. Введем функции $u_0(t)$, равные первому слагаемому справа при $t \leqslant a$ и равную x при $t > a$, и $u_1(t)$, равную второму слагаемому справа при $t \leqslant a$ и нулю при

$t>a$. Тогда при $t\leqslant a$

$$\|u_0(t)\|_E=\left\|\int\limits_0^1 \rho(\lambda t)\mathscr{L}(\lambda, t)\, S_{\lambda t}x\,d\alpha(\lambda)\right\|_E \leqslant C\int\limits_0^1 \rho(\lambda t)\times$$

$$\times\|S_{\lambda t}x\|_E d\alpha(\lambda).$$

Введя обозначение $M_\rho(\lambda)=\sup\limits_t[\rho(\lambda t)\rho^{-1}(t)]$, получим

$$\rho^{-1}(t)\|u_0(t)\|_E\leqslant C\int\limits_0^1 M_\rho(\lambda)\|S_{\lambda t}x\|_E d\alpha(\lambda).$$

Оператором растяжения называют оператор $\sigma_{1/\lambda}$, действующий по формуле $\sigma_{1/\lambda}f(t)=f(\lambda t)$. Предположим, что оператор растяжения действует в пространстве F. Тогда

$$\|\rho^{-1}(t)\chi_{(0,a]}(t)\|u_0(t)\|_E\|_F\leqslant C\int\limits_0^1 M_\rho(\lambda)\|\sigma_{1/\lambda}\|_F d\alpha(\lambda)\|x\|_{E_{A,F}}.$$

Если предположить, что интеграл справа конечен, то функция $\rho^{-1}(t)\|u_0(t)\|_E$ принадлежит F, так как

$$\|\rho^{-1}(t)\chi_{(a,\infty)}(t)\|u_0(t)\|_E\|_F=\|\rho^{-1}(t)\chi_{(a,\infty)}(t)\|_F\|x\|_E\in F$$

в силу условия а).

Далее, при $t\leqslant a$

$$\|u_1(t)\|_{E_A}=\left\|\int\limits_\delta^1 Q_{\lambda t}N(\lambda, t)\,x\,d\beta(\lambda)\right\|_{E_A}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_\delta^1\|S_{\lambda t}x\|_E d\beta(\lambda)+\|x\|_E\right),$$

поэтому

$$\|\|u_1(t)\|_{E_A}\|_F=\|\chi_{(0,a]}(t)\|u_1(t)\|_{E_A}\|_F\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_\delta^1\|\sigma_{1/\lambda}\|_F d\beta(\lambda)\|x\|_{E_{A,F}}+\|\chi_{(0,a]}\|x\|_E\|_F\right).$$

Если интеграл справа конечен, то $\|u_1(t)\|_{E_A}\in F$. Таким образом, при выполнении описанных условий: условия а) и условия

$$\int\limits_0^1 M_\rho(\lambda)\|\sigma_{1/\lambda}\|_F d\alpha(\lambda)+\int\limits_\delta^1\|\sigma_{1/\lambda}\|_F d\beta(\lambda)<\infty, \qquad (10)$$

пространство E_A вложено в пространство $(E, E_A)^K_{F_{\rho-1}, F}$, и в силу предыдущего эти два пространства совпадают с точностью до изоморфизма [2].

Отсюда вытекает

Интерполяционная теорема. *Если линейный оператор T ограниченно действует в пространстве E и в пространстве E_A, то при выполнении условий* а), (8) *и* (10) *он ограниченно действует в пространстве $E_{A,F}$.*

На самом деле справедлива более общая теорема, в которой фигурируют пары пространств E^0 и E^1, операторов A^0 и A^1, пространств F^0 и F^1 и оператор T, действующий из E^0 в E^1 и из $E^0_{A^0}$ в $E^1_{A^1}$.

Для вычисления нормы в пространстве $E_{A,F}$ иногда вводят величину

$$\omega(t, x) = \sup_{0<\tau\leqslant t} \|\rho(\tau) S_\tau x\|_E.$$

В силу (2) и (3) для $x \in \mathscr{D}(A)$

$$\omega(t, x) \leqslant \|x\|_E \text{ и } \omega(t, x) \leqslant \sup_{0<\tau\leqslant t} \rho(\tau) M \|Ax\|_E \leqslant$$
$$\leqslant M\rho(t) \|Ax\|_E. \tag{11}$$

Оказывается, что при выполнении (8) и (10) при всех $t>0$ норма в пространстве $E_{A,F}$ эквивалентна величине $\|x\|_E + \|\omega(t, x)\|_{F_{\rho-1}}$.

Действительно, из (9) с помощью (11) получаем

$$\omega(t, x) \leqslant \int_0^1 \omega(t, \rho(\lambda t) \mathscr{L}(\lambda, t) S_{\lambda t} x)\, d\alpha(\lambda) +$$
$$+ \int_\delta^1 \omega(t, Q_{\lambda t} N(\lambda, t) x)\, d\beta(\lambda) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \|\rho(\lambda t) \mathscr{L}(\lambda, t) S_{\lambda t} x\|_E d\alpha(\lambda) +$$
$$+ M \int_\delta^1 \rho(t) \|A Q_{\lambda t} N(\lambda, t) x\|_E d\beta(\lambda),$$

[2] Законность внесения норм под знак интеграла, которое делалось при доказательстве, требует обоснования, которое мы опускаем.

откуда

$$\rho^{-1}(t)\,\omega(t,x) \leqslant C\left(\int_0^1 M\rho(\lambda)\,\|S_{\lambda t}x\|_E d\alpha(\lambda) + \right.$$

$$\left. + \int_\delta^1 \|S_{\lambda t}x\|_E d\beta(\lambda)\right).$$

Выше было показано, что при условии (10) оба интеграла справа принадлежат F и их норма в F не превосходит $C\|x\|_{E_{A,F}}$. Таким образом,

$$\|\rho^{-1}(t)\,\omega(t,x)\|_F \leqslant C\|x\|_{E_{A,F}}.$$

По определению $\rho^{-1}(t)\,\omega(t,x) \geqslant \sup\limits_{0<\tau\leqslant t}\|S_\tau x\|_E \geqslant \|S_t x\|_E$, поэтому справедливы неравенства

$$\|x\|_{E_{A,F}} \leqslant \|x\|_E + \|\rho^{-1}\omega\|_F \leqslant C\|x\|_{E_{A,F}}.$$

В приложениях у нас функция $\rho(t)$ будет пропорциональной t^r. Введем пространства $L^1_{t^{-1}}(0,\infty)$ и $L^\infty(0,\infty)$. В первом из них

$$\|f\|_{L^1_{t^{-1}}} = \int_0^\infty |f(t)|\,\frac{dt}{t}.$$

Пусть G — интерполяционное между $L^1_{t^{-1}}(0,\infty)$ и и $L^\infty(0,\infty)$ пространство. По теореме Рисса — Торина таким, например, будет пространство $L^p_{t^{-1/p}}(0,\infty)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ с нормой

$$\|f\|_{L^1_{t^{-1/p}}} = \left\{\int_0^\infty |f(t)|^p\,\frac{dt}{t}\right\}^{1/p}.$$

Положим $F = G_{t^{r-s}}$, где $0<s<r$ (т. е. пространство G с весом t^{r-s}). Условие а) переходит в условие $\min\{1,t^{-r}\}\in G_{t^{r-s}}$ или, что то же, $\min\{t^{r-s},\ t^{-s}\}\in G$. Но последняя функция принадлежит $L^1_{t^{-1}}\cap L^\infty$ и поэтому принадлежит G, т. е. условие а) выполнено.

Оператор растяжения $\sigma_{1/\lambda}$ действует в пространствах $L^1_{t^{-1}}$ и L^∞ и имеет там норму 1, поэтому он ограниченно действует в пространстве G. Отсюда вытекает, что $\|\sigma_{1/\lambda}\|_{G_{t^{r-s}}} = \lambda^{-(r-s)}\|\sigma_{1/\lambda}\|_G = C\lambda^{-(r-s)}$ и, следовательно, второе слагаемое слева в (10) будет конечным. Далее, в нашем случае $M_\rho(\lambda)=\lambda^r$, поэтому первое слагаемое слева в (10) также конечно. Итак, условие (10) выполнено.

Пространство $E_{A,F}$ в этом случае будет изоморфным пространству $(E, E_A)^K_{G_{t^{-s}}, G_{t^{r-s}}}$, которое короче обозначается через $(E, E_A)_{\theta, G}$, где $\theta=s/r$.

Говорят, что линейный замкнутый оператор *B подчинен оператору A с порядком* θ ($0\leqslant\theta\leqslant1$), если $\mathscr{D}(B)\supset\mathscr{D}(A)$ и

$$\|Bx\|_E\leqslant C\|x\|_E^{1-\theta}\|x\|_{E_A}^{\theta}\quad(x\in D(A)).\tag{12}$$

Оператор B имеет порядок θ *относительно оператора A и сглаживающего аппроксимационного процесса* Q_t, если выполнено (12) и при $x\in\mathscr{D}(B)$

$$\|\rho(t)S_tx\|_E\leqslant C\rho^\theta(t)\|x\|_{E_B}.\tag{13}$$

Из неравенства (12) вытекает, что

$$\|x\|_{E_B}\leqslant(1+C)\|x\|_E^{1-\theta}\|x\|_{E_A}^{\theta}.\tag{14}$$

Если $\rho(t)$ пропорционально t^r, то из (13) следует, что

$$t^{(1-\theta)r}\|S_tx\|_E\leqslant C\|x\|_B.\tag{15}$$

Неравенства (14) и (15) позволяют к пространствам E_B применить так называемую теорему о реитерации (см. [3, 6]) и получить важное утверждение.

Если выполнены условия а), (8), (10) *и операторы* B_i ($i=0, 1$) *имеют порядки* θ_i *относительно оператора A и сглаживающего аппроксимационного процесса* Q_t, *то при* $0<\theta_0<\theta<\theta_1<1$ *с точностью до изоморфизма*

$$(E_{B_0}, E_{B_1})_{\theta',G}=(E, E_A)_{\theta,G}=E_{A,G_{t^{r-s}}},$$

где $\theta'=(\theta-\theta_0)/(\theta_1-\theta_0)$, $s=\theta r$. *Кроме того, с точностью до изоморфизма при* $0<\theta<\theta_1<1$

$$(E, E_{B_1})_{\theta'',G}=(E, E_A)_{\theta,G},$$

где $\theta''=\theta/\theta_1$, *и при* $0<\theta_0<\theta<1$

$$(E_{B_0}, E_A)_{\theta''',G}=(E, E_A)_{\theta,G},$$

где $\theta'''=(\theta-\theta_0)/(1-\theta_0)$.

Мы изложили общую схему, которая ранее была реализована в ряде работ в двух случаях, когда сглаживающий процесс строится с помощью резольвенты некоторого оператора и с помощью ограниченной полугруппы операторов. Приведем полученные таким образом основные результаты.

Пусть в банаховом пространстве E задан линейный неограниченный оператор B с плотной областью определения $\mathscr{D}(B)$, имеющий резольвенту во всех точках полуоси $(-\infty, 0)$, удовлетворяющую условию

$$\sup_{\lambda>0}\|\lambda(B+\lambda I)^{-1}\|_E<\infty. \tag{16}$$

Из этого условия вытекает равномерная по λ ограниченность оператора $B(B+\lambda I)^{-1}$ и соотношение $\lambda(B+\lambda I)^{-1}x\to x$ при $\lambda\to\infty$. Заменим λ на $1/t$ и обозначим

$$a=\sup_{t>0}\|(tB+I)^{-1}\|<\infty;\ b=\sup_{t>0}\|tB(tB+I)^{-1}\|_E<\infty. \tag{17}$$

Как сказано выше, $(tB+I)^{-1}x\to x$ при $t\to 0$ $(x\in E)$. Для фиксированного целого $r>0$ положим $A=B^r$ и $Q_t=(tB+I)^{-r}$. Тогда $S_t=AQ_t=[B(tB+I)^{-1}]^r$. Из (17) получаем, что $\|S_tx\|_E\leqslant b^rt^r$, поэтому можно положить $\rho(t)=b^{-r}t^r$. Таким образом построен сглаживающий аппроксимационный процесс. Покажем, что для него выполнено соотношение типа (8). Многочлены $(1-u)^r$ и u^r от переменной u взаимно просты, поэтому существуют многочлены $p(u)$ и $q(u)$ такие, что $(1-u)^rp(u)+u^rq(u)=I$. Подставим в это тождество вместо переменной u ограниченный оператор $(tB+I)^{-1}$. Тогда

$$I=[tB(tB+I)^{-1}]^rp((tB+I)^{-1})+(tB+I)^{-r}q((tB+I)^{-1}).$$

Это тождество является представлением типа (8), в котором $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ являются функциями единичного скачка в точке $\lambda=1$, $\mathscr{L}(\lambda, t)=b^rp((\lambda t+B)^{-1})$ и $N(\lambda, t)=q((\lambda tB+I)^{-1})$.

Теперь можно построить пространство $E_{B^r,G_{t^{r-s}}}$ с нормой

$$\|x\|_{E_{B^r,G_{t^{r-s}}}}=\|x\|_E+\|t^{r-s}\|[B(tB+I)^{-1}]^rx\|G$$

и сформулировать утверждение.

Если оператор B удовлетворяет условию (16), *то пространство $E_{B^r,G_{t^{r-s}}}$, построенное по оператору B^r (r — по-*

ложительное целое число), сглаживающему аппроксимационному процессу $Q_t=(tB+I)^{-r}$ и интерполяционному между L^1_{t-1} и L^∞ пространству G, изоморфно пространству $(E, E_{B^r})_{\theta,G}$ с $\theta=s/r$ и, следовательно, является интерполяционным между пространствами E и E_{B^r}.

Покажем теперь, что меньшие чем r-е степени оператора B при условии (16) являются подчиненными операторами его r-й степени. Пусть натуральное $m<r$. Многочлены $(1-u)^{r-m}$ и u^m взаимно просты, поэтому найдутся такие многочлены $q_m(u)$ и $p_m(u)$, что $(1-u)^{r-m}p_m(u)+u^mq_m(u)=1$. Отсюда $(1-u)^m=(1-u)^rp_m(u)+u^m(1-u)^mq_m(u)$. В это тождество подставляем вместо u оператор $(tB+I)^{-1}$, тогда

$$[tB(tB+I)^{-1}]^m=$$
$$=[tB(tB+I)^{-1}]^rp_m((tB+I)^{-1})+$$
$$+(tB+I)^{-m}[tB(tB+I)^{-1}]^mq_m((tB+I)^{-1}).$$

Пусть теперь $x\in\mathcal{D}(B^r)$. Из предыдущего вытекает, что

$$B^mx=t^{r-m}(tB+I)^{-r+m}p_m((tB+I)^{-1})B^rx+$$
$$+t^{-m}(tB(tB+I)^{-1})^mq_m((tB+I)^{-1})x.$$

Учитывая неравенства (17), получаем

$$\|B^mx\|_E\leqslant C_1(a, b)[t^{r-m}\|B^rx\|_E+t^{-m}\|x\|_E].$$

Минимизируя правую часть по t, приходим к окончательному неравенству

$$\|B^mx\|_E\leqslant C(a, b)\|x\|_E^{1-m/r}\|B^rx\|^{m/r}.$$

Таким образом, оператор B^m подчинен оператору B^r с порядком $\theta=m/r$. Приведенное доказательство принадлежит Ю. И. Любичу [7].

Покажем теперь, что оператор B^m имеет порядок $\theta=m/r$ относительно аппроксимационного процесса Q_t. Имеем

$$\|\rho(t)S_tx\|_E=b^{-r}\|[tB(tB+I)^{-1}]^rx\|_E\leqslant$$
$$\leqslant b^{-m}\|[tB(tB+I)^{-1}]^mx\|_E\leqslant b^{-m}t^ma^m\|B^mx\|_E=$$
$$=a^m\rho^{m/r}(t)\|B^mx\|_E.$$

Теперь можно сформулировать важное утверждение.

Если оператор B удовлетворяет условию (16), *то с точностью до изоморфизма при* $0 \leqslant m_0/r < \theta < m_1/r \leqslant 1$

$$(E_{B^{m_0}}, E_{B^{m_1}})_{\theta', G} = (E, E_{B^r})_{\theta, G} = E_{B^r, G_t r - s}, \tag{18}$$

где $\theta' = \dfrac{s - m_0}{m_1 - m_0}$ *и* $s = \theta r$ (*при этом считается, что* $E_{B^0} = E$).

Отсюда вытекают следствия.

1. *Пространство* $E_{B^r, G_t r - s}$ *с точностью до изоморфизма не зависит от* $r > s$.

2. *Если целое* $m < s$, *то* $E_{B^r, G_t r - s} \subset \mathscr{D}(B^m)$.

Более того, можно показать, что пространство $E_{B^r, G_t r - s}$ состоит из тех элементов из $\mathscr{D}(B^m)$, для которых

$$B^m x \in E_{B^\rho, G_t \rho - (s - m)} \quad (\rho > s - m).$$

Построение промежуточных пространств с помощью резольвенты было впервые (для случая $G = L^p_{t - 1/p}$) проведено П. Грисвардом [8], позднее такие пространства исследовались Х. Комацу [9] и др. Другой способ, когда сглаживающий процесс строится с помощью полугруппы операторов, был впервые предложен Ж. Л. Лионсом [10, 11] (для случая $G = L^p_{t - 1/p}$), развит в работах Ж. Л. Лионса и Ж. Петре [3], Ж. Петре [12]. Подробное изложение его (в случае $G = L^p_{t - 1/p}$) имеется в книге П. А. Бутцера и Х. Беренса [13].

Пусть $U(t)$ сильно непрерывная, равномерно ограниченная ($\|U(t)\| \leqslant M$) полугруппа операторов в банаховом пространстве E, удовлетворяющая C_0-условию, т. е. $U(t)x \to x$ при всех $x \in E$.

Обозначим через D производящий оператор этой полугруппы. Тогда оператор $B = -D$ удовлетворяет условию (16) [14]. Для него можно провести изложенные выше построения. Однако, положив снова $A = B^r = (-D)^r$, мы построим другой сглаживающий аппроксимационный процесс, а именно положим

$$Q_t x = \left[\frac{1}{t}\int_0^t U(\tau)\, d\tau\right]^r x = \frac{1}{t^r}\int_0^t \cdots \int_0^t U(\tau_1 + \ldots + \tau_r)\, d\tau_1 \ldots d\tau_r.$$

Операторы $\dot{Q}_t$ обладают свойствами 1) и 2). Для оператора S_t получается формула

$$S_t x = \left[\frac{1}{t} B \int_0^t U(\tau)\, d\tau\right]^r = \frac{1}{t^r}[I - U(t)]^r x$$

и оценка

$$\| S_t x \|_E \leqslant \frac{(M+1)^r}{t^r} \| x \|_E,$$

поэтому можно положить $\rho(t) = (M+1)^{-r} t^r$.

Наиболее интересным является вывод соотношения (8). Имеем

$$I = \left(\frac{r}{t}\right)^r \int_0^{t/r} \ldots \int_0^{t/r} [I - U(\tau_1 + \ldots + \tau_r)]^r d\tau_1 \ldots d\tau_r +$$

$$+ \left(\frac{r}{t}\right)^r \int_0^{t/r} \ldots \int_0^{t/r} [I - (I + U(\tau_1 + \ldots + \tau_r))^r]\, d\tau_1 \ldots d\tau_r =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left[I - U\left(\frac{t}{r}(s_1 + \ldots + s_r)\right)\right]^r ds_1 \ldots ds_r +$$

$$+ \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} C_r^k \left(\frac{r}{t}\right)^r \int_0^{t/r} \ldots \int_0^{t/r} U(k(\tau_1 +$$

$$+ \ldots + \tau_r))d\tau_1 \ldots d\tau_r.$$

Так как в первом интеграле справа функция зависит только от суммы $\tau_1 + \ldots + \tau_r$, то его можно свести к однократному. Тогда получим

$$I = \int_0^1 [I - U(\lambda t)]^r a_r(\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} C_r^k \frac{1}{\left(\frac{k}{r} t\right)^r} \int_0^{kt/r} \ldots \int_0^{kt/r} U(s_1 + \ldots$$

$$+ s_r)\, ds_1 \ldots ds_r.$$

Это тождество можно записать в виде (8), полагая $\mathcal{L}(\lambda, t)$ и $N(\lambda, t)$ равными I, $d\alpha(\lambda)=(M+1)^r a_r(\lambda)\,d\lambda$ и представляя функцию $\beta(\lambda)$ как сумму функций скачков в точках $\lambda=\frac{k}{r}$ $(k=1, \ldots, r)$ с величинами скачков $(-1)^{k-1}$ C_r^k.

Мы приходим к утверждению.

Если оператор $-B$ является производящим оператором равномерно ограниченной полугруппы $U(t)$ с C_0-условием, то пространство $E_{B^r, G_{t^{r-s}}}$, построенное по оператору B^r, сглаживающему аппроксимационному процессу $\left[\frac{1}{t}\int\limits_0^t U(\tau)\,d\tau\right]^r$ и интерполяционному между $L^1_{\frac{1}{t}-1}$ и L^∞ пространству G, изоморфно пространству $(E, E_{B^r})_{\theta, G}$, где $\theta=s/r$.

Мы не будем формулировать другие следствия из общих рассмотрений, проведенных выше.

Опишем кратко, как прилагаются описанные результаты. За пространство E примем пространство $L^p(R^n)$. В качестве оператора B рассмотрим оператор

$$B=\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{1/2}\mathcal{F}, \tag{19}$$

где $\mathcal{F}x=\tilde{x}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $x(s)$ $(s\in R^n)$. Если $1<p<\infty$, то с помощью теоремы С. Г. Михлина [15] о мультипликаторах показывается, что пространство E_{B^r} с точностью до изоморфизма совпадает с пространством Соболева $W^{r,p}(R^n)$ [16]. С помощью той же теоремы проверяется, что оператор B удовлетворяет условию (16), поэтому можно строить пространства

$$B_G^{s,p}(R^n)=(L^p(R^n), W^{r,p}(R^n))_{\theta,G} \quad (\theta=s/r)$$

и получать для них различные эквивалентные нормировки, исследовать их интерполяционные свойства. Если положить $G=L^\infty$, то получаются пространства Никольского, если $G=L^p$, то пространства Бесова [17].

Теоремы для пространств $B_G^{s,p}$ функций, определенных во всем пространстве, затем переносятся на случай таких пространств в регулярной области с помощью стандартной техники, использующей теоремы о продолжении гладких функций, разбиение единицы и интерполяционные теоремы [18].

В заключение мы расскажем об одной абстрактной теореме вложения, полученной в работе А. Иошикава [19], которая дает возможность доказывать точные теоремы вложения для пространств Бесова.

Здесь рассматриваются два банаховых пространства E_0 и E_1, вложенные в отделимое линейное топологическое пространство $\mathscr{E}$. Предполагается, что в $\mathscr{E}$ действует линейный оператор B, обладающий свойствами:

1) Оператор B непрерывен и операторы $B+\lambda I$ непрерывно обратимы на $\mathscr{E}$ при любом $\lambda>0$.

2) Сужения $(B_i+\lambda I)^{-1}$ операторов $(B+\lambda I)^{-1}$ на пространство E_i действуют в этих пространствах и удовлетворяют условию (16)

$$\|\lambda(B_i+\lambda I^{-1}\|_{E_i} \leqslant a \qquad (i=0,1).$$

3) Оператор $(B_0+\lambda I)^{-1}$ действует из пространства E_0 в пространство E_1 и

$$\|(B_0+\lambda I)^{-1}\|_{E_0\to E_1} \leqslant C\lambda^{\nu-1}, \tag{20}$$

где C и ν — положительные константы, не зависящие от λ.

4) Области определения операторов B_i плотны в пространствах E_i.

Тогда при $0<\theta<\theta+\nu/r<1$

$$\left(E_0, E_{B_0^r}\right)_{\theta+\nu/r, G} \subset (E_1, E_{B_1^r})_{\theta, G}.$$

Для доказательства предположим сначала, что $s=\theta r>1$. Если $x\in\left(E_0, E_{B_0^r}\right)_{\theta+\nu/r, G}$, то это равносильно тому, что

$$t^{r-(s-\nu)}\|[B_0(tB_0+I)^{-1}]^r\|_{E_0}\in G.$$

Так как $s>1$, то $x\in\mathscr{D}(B_0)$ (следствие 2, стр. 200).

Из свойства 3 вытекает, что $\mathscr{D}(B_0)\subset E_1$. Действительно, при $x\in\mathscr{D}(B_0)$ имеем $x=\lambda(B_0+\lambda I)^{-1}x+(B_0+\lambda I)^{-1}\times$ $\times B_0x\in E_1$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(t)=t^{r+1-s}\|[B_1(tB_1+I)^{-1}]^{r+1}x\|_{E_1}=$$
$$=t^{r+1-s}\|[B_1(tB_1+I)^{-1}]^r B_1(tB_1+I)^{-1}x\|_{E_1}.$$

Так как $x\in E_0\cap E_1$, то элемент $B_1(tB_1+I)^{-1}x=B_0(tB_0+$

$+I)^{-1}x=(tB_0+I)^{-1}B_0x$ также принадлежит $E_0\cap E_1$. В силу (20)

$$\Phi(t)\leqslant t^{r-(s+\nu-1)}\|B_0(tB_0+I)^{-1}]^rB_0x\|_{E_0}.$$

По упоминавшемуся следствию 2 элемент B_0x принадлежит пространству $E_{B^r,G_{t^{r-(s+\nu-1)}}}$, поэтому функция, стоящая справа, а значит и слева, принадлежит G. Вспоминая определения функции $\Phi(t)$, мы приходим к выводу, что $x\in E_{B_1^{r+1},G_{t^{r+1-s}}}=E_{B_1^r,G_{t^{r-s}}}$ (следствие 1), т. е. $x\in\left(E_1,E_{B_1^r}\right)_{\theta,G}$.

Пусть теперь $s=\theta r<1$. Оператор $(B+\lambda I)^{-1}$ осуществляет изоморфизм между парами пространств E_i, $E_{B_i^r}$ и E_{B_i}, $E_{B_i^{r+1}}$. В силу интерполяционных свойств он осуществляет изоморфизм и между пространствами $\left(E_1,E_{B_1^r}\right)_{\theta,G}$ и $\left(E_{B_1},E_{B_1^{r+1}}\right)_{\theta,G}$, а также между $\left(E_0,E_{B_0^r}\right)_{\theta+\nu/r,G}$ и $\left(E_{B_0},E_{B_0^{r+1}}\right)_{\theta+\nu/r,G}$. В силу изоморфизма (18),

$$\left(E_{B_1},E_{B_1^{r+1}}\right)_{\theta,G}=\left(E,E_{B_1^r}\right)_{\theta+1/r,G}\text{ и }\left(E_{B_0},E_{B_0^{r+1}}\right)_{\theta+\nu/r,G}=$$
$$=\left(E_0,E_{B_0^r}\right)_{\theta+(\nu+1)/r,G}$$

с точностью до изоморфизма. По доказанному выше имеет место вложение

$$\left(E_0,E_{B_0^r}\right)_{\theta+(\nu+1)/r,G}\subset\left(E_1,E_{B_1^r}\right)_{\theta+1/r,G},$$

и, следовательно, $\left(E_{B_0},E_{B_0^{r+}}\right)_{\theta+\nu/r,G}\subset\left(E_{B_1},E_{B_1^{r+1}}\right)_{\theta,G}$.

Отсюда вытекает, что

$$\left(E_0,E_{B_0^r}\right)_{\theta+\nu/r,G}=(B+\lambda I)\left(E_{B_0},E_{B_0^{r+1}}\right)_{\theta+\nu/r,G}\subset$$
$$\subset(B+\lambda I)\left(E_{B_1},E_{B_1^{r+1}}\right)_{\theta,G}=\left(E_1,E_{B_1^r}\right)_{\theta,G}.$$

Утверждение доказано.

Для получения из этого утверждения теоремы вложения для пространств Бесова (если $1<p_0\leqslant p_1<\infty$, то $B_G^{s_0,p_0}(R^n)\subset B_G^{s_1,p_1}(R^n)$ при $n/p_0-s_0=n/p_1-s_1$) нужно положить $E_0=L^{p_0}(R^n)$ и $E_1=L^{p_1}(R^n)$ и доказать, что оператор (19) обладает свойством 3) с $\nu=n/p_0-n/p_1$. Это можно сделать, используя, например, теорему П. И. Лизоркина о мультипликаторах для преобразования Фурье [20].

Для получения теорем вложения для пространств гладких функций на многообразиях разной размерности разработана так называемая теория следов. Ее изложение может быть темой другого цикла лекций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gagliardo E.** A unified structure in various families of function spaces. Compactness and closure theorems.— "Proc. Intern. Sympos. Pergamon Press", 1961, p. 237—241.
2. **Berens H.** Interpolations methoden zur Behandlung von approximations-processen auf Banach räumen. V. 64. Springer-Verlag, 1968.
3. **Lions J. L., Peetre J.** Sur une classe d'espaces d'interpolation.— Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.", 1964, v. 19, p. 5—68.
4. **Peetre J.** Nouvelles proprietes d'espaces d'interpolation.— "Compt. Rend. Acad. Sci.", Paris, 1963, v. 256, p. 1424—1426.
5. **Дмитриев В. И.** О методе Лионса — Петре построения интерполяционных пространств.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 198.
6. **Мадженес Э.** Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных.— «Усп. мат. наук», 1966, т. 21, № 2.
7. **Любич Ю. И.** О неравенствах между степенями линейного оператора.— «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1960, т. 24, № 6, с. 825—864.
8. **Grisvard P.** Commutativitè de deux foncteurs d'interpolation et applications.— "J. Math. Pures et appl.", 1966, v. 45, p. 143—290.
9. **Komatsu H.** Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces.— "Pacific Journ. Math.", 1967, v. 21, p. 89—111.
10. **Lions J. L.** Theoremes de trace et d'interpolation. I.— "Ann. Scuola Norm.", Sup Pisa, 1959, v. 13, p. 389—403.
11. **Lions J. L.** Une construction d'espaces d'interpolation.— "C. r. Acad. sci.", Paris, 1961, v. 251, p. 1853—1855.
12. **Peetre J.** A theory of interpolation of normed spaces. Note Universidade de Brasilia, 1963. 86 p.
13. **Butzer P. L., Berens H.** Semi-groups of operators and approximation. Berlin, Springer, 1967. 318 p.
14. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962. 829 с.
15. **Михлин С. Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962. 254 с.
16. **Lions J. L., Magenes E.** Problemes aux limites non homogenes; III, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1961, v. 15, p. 41—42.
17. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., «Наука», 1969. 480 с.
18. **Лионс Ж. Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971. 371 с.
19. **Ioshikawa A.** Remarks on the theory of interpolation spaces.— J. Faculty Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA, Math.", 1968, v. 15, p. 209—251.
20. **Лизоркин П. И.** (L^p, L^q)-мультипликаторы интегралов Фурье.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 152, с. 808—811.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ ИДЕАЛОВ, ОБРАЗУЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ S-ЧИСЕЛ

Б. М. Макаров, Нашат Фарид Мухамед Фатхи

1. Обозначения и определения. Пусть X, Y — банаховы пространства, B_X — единичный шар пространства X, $L(X, Y)$ — множество всех (линейных непрерывных) отображений из X в Y. Символом $\delta_n(A)$ будем обозначать n-поперечник множества A. С каждым оператором $T \in L(X, Y)$ свяжем величины (обобщенные n-числа)

$$a_n(T) = \inf\{\|T - S\| : S \in L(X, Y),\ \dim S(X) \leqslant n\},$$
$$t_n(T) = \delta_n(iT(B_X)) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где i — произвольное изометрическое вложение пространства Y в пространство $l^\infty(\Omega)$ (Ω — произвольное множество достаточно большой мощности).

Числа $a_n(T)$, $t_n(T)$ называются *аппроксимативными числами и числами Тихомирова* оператора T. Они были введены и изучались в [4, 5, 6]. Отметим, что

$$t_n(T) \leqslant a_n(T) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

А. Пич предложил общую схему [5] для построения операторного идеала с помощью обобщенных s-чисел. Опишем эту конструкцию.

Пусть E — некоторое линейное подмножество множества всех числовых последовательностей, удовлетворяющее условиям:

I) всякая финитная последовательность входит в E;

II) если $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty} \in E$, $|\eta_n| \leqslant |\xi_n|$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty} \in E$;

III) если $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty} \in E$, то $\{\xi_0, \xi_0, \xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \ldots\} \in E$.

Такое множество E мы будем называть *специальным про-*

странством последовательностей (сокращенно с. п. п.). Заметим, что множество E, удовлетворяющее условиям I), II) и симметричное, т. е. содержащее вместе с каждой последовательностью ξ любую последовательность, координаты которой являются перестановкой координат последовательности ξ, удовлетворяет, как легко убедиться, условию III).

Образуем множества

$$S_E^{\mathrm{app}}(X, Y) = \{T \in L(X, Y) : \{a_n(T)\}_{n=0}^{\infty} \in E\},$$
$$S_E^{\mathrm{tich}}(X, Y) = \{T \in L(X, Y) : \{t_n(T)\}_{n=0}^{\infty} \in E\}.$$

Из неравенства (1) следует, что $S_E^{\mathrm{app}}(X, Y) \subset S_E^{\mathrm{tich}}(X, Y)$. Класс $S_E^{\mathrm{app}} = \{S_E^{\mathrm{app}}(X, Y) : X, Y$ — банаховы пространства$\}$ и образуемый аналогично класс S_E^{tich} являются операторными идеалами [5]. Наша цель в этой работе — выяснить, изменяются ли эти идеалы при изменении множества E. Мы увидим, в частности (см. следствие 2), что если $E \underset{\neq}{\subset} c_0$, где c_0 — пространство всех стремящихся к нулю последовательностей, то идеалы S_E^{app}, S_E^{tich} малы [1]. Для $E = l^p$ $(0 < p < +\infty)$ этот результат получен в [7].

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть X, Y — бесконечномерные банаховы пространства, E, F — два с.п.п. Если множество $E \backslash F$ содержит монотонно убывающую к нулю последовательность положительных чисел, то существует такой вполне непрерывный оператор $A \in L(X, Y)$, что*

$$A \in S_F^{\mathrm{app}}(X, Y), \quad A \notin S_E^{\mathrm{tich}}(X, Y).$$

Следствие 1. *Если $E \subset F$, то при выполнении условий теоремы 1*

$$S_E^{\mathrm{app}}(X, Y) \underset{\neq}{\subset} S_F^{\mathrm{app}}(X, Y), \quad S_E^{\mathrm{tich}}(X, Y) \underset{\neq}{\subset} S_F^{\mathrm{tich}}(X, Y).$$

---

[1] По определению А. Пича [5], идеал $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}(X, Y)\}$ называется малым, если из равенства $\mathcal{I}(X, Y) = L(X, Y)$ следует, что хотя бы одно из пространств X, Y конечномерно.

Следствие 2. *Если X, Y — бесконечномерные банаховы пространства, E — с. п. п., не содержащее пространства c_0, то $S_E^{\text{tich}}(X, Y)$ не содержит множества $L_c(X, Y)$ всех вполне непрерывных операторов.*

Для доказательства следствия 2 достаточно заметить, что $L_c(X, Y) = S_{c_0}^{\text{tich}}(X, Y)$ и применить теорему 1, считая, что $F = c_0$.

Отметим, что если E, F — симметричные пространства и $E \subset F \subset c_0$, то теорема 1 справедлива при единственном условии $E \neq F$.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X, Y — бесконечномерные банаховы пространства, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонно убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Существует такой вполне непрерывный оператор $A \in L(X, Y)$, что*

$$2^{-4}\lambda_{3n} \leqslant t_n(A) \leqslant a_n(A) \leqslant 8\lambda_{3n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \quad (2)$$

3. Доказательства теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty} \in F \setminus E$, $\xi_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $\xi_n \geqslant \xi_{n+1} > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

По теореме 2 существует такой оператор $A \in L_c(X, Y)$, что $2^{-4}\xi_{3n} \leqslant t_n(A)$, $a_n(A) \leqslant 8\xi_{3n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Из последнего неравенства вытекает, что $A \in S_F^{\text{app}}(X, Y)$. С помощью свойства III с. п. п. легко убедиться, что соотношения $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty} \in E$ и $\{\eta_{3n}\}_{n=1}^{\infty} \in E$ равносильны, если $\eta_0 \geqslant \eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. В силу этого $\{\xi_{3n}\}_{n=1}^{\infty} \notin E$ и, следовательно, $A \notin S_E^{\text{tich}}(X, Y)$.

Доказательство теоремы 2 опирается на несколько вспомогательных фактов.

Лемма 1. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Существуют последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие что*

1) $\mu_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $\quad b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$;

2) $\mu_n \geqslant \mu_{n+1}$, $1/2 \geqslant b_n \geqslant b_{n+1}$, $\lambda_n = \mu_n b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;

3) $n_{k+1} \geqslant 3n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *где* $n_k = \min\{n : b_n \leqslant 1/2^k\}$.

Элементарное доказательство этой леммы мы опускаем.

Пусть X — банахово пространство, L, M — его подпространства. По определению В. И. Гурария [1], *накло-*

ном $I(L;\ M)$ подпространства L к подпространству M называется величина

$$I(L;\ M)=\inf\{\|x+y\|:x\in L,\ \|x\|=1,\ y\in M\}.$$

Легко убедиться, что непрерывный проектор $P:L\oplus\oplus M\overset{\text{на}}{\to}L$ «вдоль M», т. е. такой, что $P^{-1}(0)=M$, существует тогда и только тогда, когда $I(L;\ M)>0$. При этом $I(L;\ M)=\|P\|^{-1}$. В. И. Гурарий установил следующую теорему [1]:

Пусть L — конечномерное подпространство бесконечномерного банахового пространства X, $\varepsilon\in(0,\ 1)$. Существует такое подпространство $M\subset X$, что $I(L;\ M)>1-\varepsilon$ и $\operatorname{codim} M<+\infty$.

Символом $d(X,\ X_1)$ мы обозначаем расстояние Банаха — Мазура между двумя изоморфными банаховыми пространствами, т. е. $\inf\|W\|\|W^{-1}\|$, где нижняя грань вычисляется по всем изоморфным отображениям $W\in L(X,\ X_1)$.

Доказательство следующей леммы получается с помощью приведенной выше теоремы Гурария и теоремы Дворецкого [2]. Аналогичные рассуждения можно найти в [3].

Лемма 2. *Пусть X — бесконечномерное банахово пространство, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Существует последовательность подпространств $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что*

1) $L_k\subset X,\ \dim L_k=m_k,\ d\left(L_k,\ l^2_{m_k}\right)<2\quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$;

2) $I(L_1\oplus L_2\oplus\ldots\oplus L_m;\ L_{m+1}\oplus\ldots\oplus L_{m+n})>2^{-1}\ (m,\ n=\\=1,\ 2,\ \ldots)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть b_n, μ_n, n_k такие, как в лемме 1, $n_0=m_0=0$, $m_k=n_k-n_{k-1}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. Пусть далее $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(L_k\subset X^*)$, $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(M_k\subset Y)$ — последовательности подпространств со свойствами, указанными в лемме 2. Положим $L=\mathscr{L}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}L_k\right)$.

Легко проверить, что при каждом $k=1,\ 2,\ \ldots$ существует такой проектор $P_k:L\overset{\text{на}}{\to}L_k$, что $P_k^{-1}(0)\supset L_j\ (j\neq k)$, $\|P_k\|\leqslant\leqslant 4$. Пусть, наконец, T_k, S_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ — изоморфные отображения

$$T_k:l^2_{m_k}\to L_k,\quad S_k:l^2_{m_k}\to M_k,$$

удовлетворяющие условиям: $\|T_k\|=\|S_k\|=1$, $\|T_k^{-1}\|\leqslant 2$, $\|S_k^{-1}\|\leqslant 2$. Построим последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X^*$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Y$, полагая

$$f_{n_{k-1}+j}=T_k(e_j),\quad y_{n_{k-1}+j}=S_k(e_j)\quad (k=1,2,\ldots,\ j=1,2,\ldots,m_k),$$

где $\{e_j\}_{j=1}^{m_k}$ — орты канонического базиса в $l_{m_k}^2$. Напомним, что

$$2^{-k}\leqslant b_n\leqslant 2^{-k+1}\ (k=1,\ 2,\ \ldots),\ \text{если}\ n_{k-1}\leqslant n\leqslant n_k. \tag{3}$$

Используя эти неравенства, легко убедиться, что при любых $x\in X$, $g\in Y^*$ справедлива оценка

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{\infty} b_n\,|f_n(x)|\,|g(y_n)|\leqslant 2^{-k+2}\|x\|\,\|g\|. \tag{4}$$

Положим

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(x)\,y_n,\quad A_p(x)=\sum_{n=1}^{p}\lambda_n f_n(x)\,y_n\quad (x\in X).$$

Если $n_{k-1}<p\leqslant n_k$, то с помощью (3) и (4) получаем

$$a_p(A)\leqslant\|A-A_p\|\leqslant\mu_{p+1}2^{-k+2}\leqslant 8\mu_{p+1}b_{p+1}=8\lambda_{p+1}\leqslant 8\lambda_p.$$

Перейдем к доказательству левой части неравенства (2).

Пусть φ — канонический гомоморфизм пространства X^{**} на $X^{**}/L^0=L^*$ и пусть

$$V(h)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n h(f_n)\,y_n\quad (h\in L^*). \tag{5}$$

Ясно, что $A^{**}=V\circ\varphi$ и $t_p(A)=t_p(A^{**})=t_p(V)$. Поэтому нам достаточно доказать, что

$$2^{-4}\lambda_{3p}\geqslant t_p(V)\quad (p=1,\ 2,\ \ldots). \tag{6}$$

По теореме об n-поперечниках шаров [8] неравенство (6) будет справедливо, если $V(B_{L^*})\supset 2^{-4}\lambda_{3p}(B_Y\cap M)$, где M — некоторое $(p+1)$-мерное подпространство в Y. Это включение мы и будем проверять. Зафиксируем произвольное натуральное число p. Пусть $m_{k-1}\leqslant p<m_k$. Заметим, что $n_{k-1}+1\leqslant 2p$. Очевидно, что

$$B_{L^*}\supset 2^{-2}P_k^*(B_{L^*})\supset 2^{-3}P_k^*\left(T_k^{-1}\right)^*(B_k),$$

где B_k — единичный шар в $l^2_{m_k}$. Из равенства (6) немедленно следует, что

$$V\left(P_k^*\left(T_k^{-1}\right)^* e_j\right) = \lambda_{n_{k-1}+j} y_{n_{k-1}+j} \quad (j = 1, 2, \ldots, m_k).$$

Таким образом,

$$V(B_{L^*}) \supset 2^{-3} \left\{ V P_k^* \left(T_k^{-1}\right)^* \left(\sum_{j=1}^{m_k} \eta_j e_j \right) : \sum_{j=1}^{m_k} |\eta_j|^2 \leqslant 1 \right\} =$$

$$= 2^{-3} \left\{ \sum_{j=1}^{m_k} \lambda_{n_{k-1}+j} \eta_j y_{n_{k-1}+j} : \sum_{j=1}^{m_k} |\eta_j|^2 \leqslant 1 \right\} \supset$$

$$\supset 2^{-3} \lambda_{n_{k-1}+p+1} \left\{ \sum_{j=1}^{p+1} \eta_j y_{n_{k-1}+j} : \sum_{j=1}^{p+1} |\eta_j|^2 \leqslant 1 \right\} \supset$$

$$\supset 2^{-3} \lambda_{3p} S_k \left(B_k \cap l^2_{p+1}\right) = 2^{-3} \lambda_{3p} S_k (B_k) \cap M,$$

где $M = S_k\left(l^2_{p+1}\right) \subset M_k$, $\dim M = p+1$. Так как $\| S_k^{-1} \| \leqslant 2$, то $S_k(B_k) \supset 2^{-1} B_Y \cap M_k$. Окончательно получаем $V(B_{L^*}) \supset 2^{-3} \lambda_{3p} S_k(B_k) \cap M \supset 2^{-4} \lambda_{3p} B_Y \cap M_k \cap M =$

$$= 2^{-4} \lambda_{3p} B_Y \cap M.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гурарий В. И.** Наклоны подпространств и условные базисы в банаховых пространствах.— «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, с. 504—506.
2. **Dvoretzky A.** Some results on convex bodies in Banach spaces.— In: Proceedings Symposium on Linear Spaces. Jerusalem, 1961, p. 123—160.
3. **Morell I. S., Retherford J. R.** p-trivial Banach spaces.—"Studia math.", 1972, v. 43, p. 1—25.
4. **Пич А.** Ядерные локально выпуклые пространства. М., «Мир», 1967. 266 с.
5. **Pietsch A.** Theorie der operatorenideale (Zusammenfassung). Jena, 1972. 260 p.
6. **Pietsch A.** *s*-Numbers of operators in Banach spaces.—"Studia math.", 1974, v. 51, p. 201—223.
7. **Pietsch A.** Small ideals of operators.—"Studia math.", 1974, v. 51, p. 265—267.
8. **Тихомиров В. М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучшей аппроксимации.— «Усп. мат. наук», 1960, т. 15, № 3, с. 81—120.

ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Б. С. Митягин

Вопрос о структуре линейных нормированных и ненормированных пространств тесно связан с геометрическими свойствами линейных операторов. Эти взаимосвязи обусловливаются двумя обстоятельствами.

С одной стороны, многие линейные (ядерные) пространства по самому своему заданию являются областями определения систем замкнутых (самосопряженных) операторов в банаховом (гильбертовом) пространстве, и свойства этой системы операторов определяют линейно-топологический тип основного пространства. Характерным примером могут служить введенные Колмогоровым и Пелчинским аппроксимативная и диаметральная размерности линейных пространств. Другой такого типа пример — и ему будут посвящены первые параграфы этой статьи — задача о существовании базиса в ядерном пространстве Фреше. Эта *задача Гротендика* была недавно отрицательно решена Зобиным и Митягиным; в основе построения такого пространства без базиса лежит специально подобранная система «сильно некоммутирующих» самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, что на геометрическом языке соответствует системе вложенных друг в друга эллипсоидов, которую невозможно заменить эквивалентной системой соосных.

С другой стороны, линейное пространство само порождает серию пространств операторов (компактные, абсолютно суммирующие разных типов и т. п.), и они как производные объекты или их специальные свойства могут выступать в качестве линейно-топологических инвариантов исходного пространства. Широко известны приемы, основанные на анализе сопряженного пространства, т. е. пространства операторов $X \mapsto \boldsymbol{R}^1$ (или $\boldsymbol{C}^1$) в одномерное пространство. Но заменяя $\boldsymbol{R}^1$ на гильбертово H или другие специальные бесконечномерные банаховы пространства, можно получать новые интересные объекты, несущие богатую информацию о пространстве X. На этом пути в последнее время был решен вопрос о неизоморфизме многих конкретных функциональных банаховых пространств (Кисляков, Митягин — Пелчинский). Подчеркну, что важную роль при этом играют классы абсолютно суммирующих и интегральных операторов. Эти идущие от Гротендика понятия — естественные в случае банахова пространства аналоги s-идеалов операторов (типа Гильберта — Шмидта) в гильбертовом пространстве.

§ 1. Ядерные пространства Фреше без базиса

Ядерное пространство Фреше (с непрерывной нормой) можно рассматривать как общую область определения системы $1_H = A_0, A_1, \ldots, A_p, \ldots$ строго положительно определенных самосопряженных (с. п. о. с.) операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H, такой, что

а) $A_p^2 \leqslant A_{p+1}^2, \quad p = 0, 1, \ldots;$

б) $X = \bigcap\limits_0^\infty \mathfrak{D}(A_p)$ плотно в $H(A_n)$ для любого $n \geqslant 0$,

где $H(B) = \mathfrak{D}(B)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y)_B = (Bx, By)$ и единичным шаром $Э_B = \{x : (x, x)_B \leqslant 1\}$;

в) для каждого p эллипсоид $Э(A_{p+1})$ является компактом в $H(A_p)$ и его полуоси $d_n(Э_{p+1}, Э_p)$ образуют сходящийся ряд

$$\sum\nolimits_0^\infty d_n(Э_{p+1}, Э_p) < \infty. \tag{1.1}$$

Эллипсоиды $Э_p = Э(A_p)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в X, т. е. топология задается системой гильбертовых норм $\|x\|_p = \|x\|_{A_p} = (x, x)_{A_p}^{1/2}$.

Простые и (важные) примеры таких пространств получаются в следующих частных случаях.

1°. $H=l^2(\boldsymbol{Z})$, e_k — основные орты в H, $k\in\boldsymbol{Z}$, операторы A_p определены соотношениями

$$A_p e_k = (1+k^2)^p e_k, \quad p\geqslant 0.$$

Тогда

$$X = \bigcap_0^\infty \mathfrak{D}(A_p) = \left\{x = (x_k)_{k\in\mathbf{Z}} : \sum_k |x_k|^2 (1+k^2)^{2p} < \infty, \ \forall p\right\}$$

— пространство (изоморфное пространству) $C^\infty(S^1)$ бесконечно дифференцируемых функций на окружности, что легко понять, если смотреть на (x_k) как на последовательность коэффициентов Фурье функции

$$x(t) = \sum x_k \exp ikt.$$

2°. $H=l^2(\boldsymbol{Z}_+)$, или более обще $,l^2(\mathbf{Z}_+^N)$, где $\boldsymbol{Z}_+ = \{k\in\boldsymbol{Z} : k\geqslant 0\}$, e_k — основные орты в H, $k=(k_1, \ldots, k_N) \in \mathbf{Z}_+^N$ и $A_p e_k = 2^{p|k|} e_k$, где $|k| = k_1 + \ldots + k_N$. Тогда

$$X = \bigcap_0^\infty \mathfrak{D}(A_p) = \left\{x = (x_k)_{k\in\mathbf{Z}_+^N} : \sum |x_k|^2 \cdot 2^{2p|k|} < \infty, \ \forall p\right\}$$

— пространство $H(\boldsymbol{C}^N)$ целых функций $x(z) = \sum x_k z^k$, где $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_N^{k_N}$, N комплексных переменных.

3°. Примеры 1° — 2° и многие другие, где операторы A явно задаются как диагональные операторы в отмеченном ортонормированном базисе $\{e_k\}$ в $H=l^2(K)$, $k\in K$, K — счетное множество, охватываются схемой пространств Кёте. В этом случае $A_p e_k = a_{kp} e_k$, $a_{kp} > 0$, и

$$X = \{(x_k)_{k\in K} : \sum |x_k|^2 a_{kp}^2 < \infty, \ \forall p\}.$$

Во всех примерах 1° — 3° пространство X имеет *базис*, т. е. такую биортогональную систему векторов и функционалов (f_k, f_k') — $f_j'(f_k) = 0$, $j\neq k$; $=1$, $j=k$, — что для любого $x\in X$ имеет место разложение

$$x = \sum f_k'(x) f_k.$$

Действительно, по самому определению X такое разложение справедливо, если положить $f_k = e_k f_k'(x) = x_k$, $k\in K$. Хотя счетное множество K не обязательно натуральный ряд, мы можем свободно понимать суммирование по $k\in K$, так как по теореме об абсолютности базиса (Дынин — Митягин [12, 21], теорема 10.2 [27]) в ядерном пространстве Фреше всякий базис является безусловным (и абсолютным), т. е. сходятся ряды $\sum_{k\in K}|f_k'(x)|\|f_k\|_p$ для любых p и $x\in X$.

При подсчете относительных полуосей $d_n(\mathcal{E}_q, \mathcal{E}_p)$ в случае 3° необходимо отношения a_{kp}/a_{kq}, $k\in K$, расположить в порядке монотонного убывания, так что

$$d_n(\mathcal{E}_q, \mathcal{E}_p) = a_{k(n),\,p}/a_{k(n),\,q} \geqslant d_{n+1}(\mathcal{E}_q, \mathcal{E}_p). \tag{1.2}$$

Условие ядерности (1.1) принимает вид: для любого p найдется q, такое, что $\sum a_{kp}/a_{kq} < \infty$, где о монотонном упорядочении можно специально не говорить.

Но при анализе структуры базисов весьма существенно, в какой мере от индексов p, q зависит то упорядочение $k(n)$ множества K, которое делает последовательность (1.2) монотонной. В этой связи важно понятие *правильного* (или *регулярного*) *базиса*, четко выделенное Драгилевым [9]: базис (e_n) в пространстве примера 3° называется правильным, или регулярным, если $K = N$ — натуральный ряд, и $\frac{a_{np}}{a_{nq}} \geqslant \frac{a_{n+1p}}{a_{n+1q}}$ для любых $q \geqslant p$ и $n \geqslant 1$; более общо, базис $(f_k)_{k\in K}$ в ядерном пространстве Фреше X называется *правильным*, если существует такая система норм $\|\cdot\|_p$ и 1 — 1-соответствие $\sigma: N\to K$, что последовательность $\|f_{\sigma(n)}\|_p/\|f_{\sigma(n)}\|_q$ монотонно убывает для любой пары $q \geqslant p$.

4°. Более общим, чем 3°, примером оказываются *блочные пространства типа Кёте*. Пусть $H = (H_k)_{l^2}$ — гильбертова прямая сумма счетного числа (конечномерных) гильбертовых пространств, т. е. $H = \{h = (h_k) : \sum (h_k, h_k) < \infty\}$ со скалярным произведением $(h, g) = \sum (h_k, g_k)$ для $h = (h_k)$ и $g = (g_k)$. Отождествим $h_k \in H_k$ с элементом $\tilde{h}_k$ в H, у которого все координаты, кроме k-й, равны нулю, а k-я равна h_k. Пусть $A_p h_k = a_{kp} h_k$, где a_{kp} — строго положительно определенный оператор в H_k, и положим

$$X = \{x = (x_k) \in (H_k)_{l^2} : \|x\|_p^2 = \sum \|a_{kp} x_k\|^2 < \infty,\ \forall p\}. \tag{1.3}$$

Для монотонности норм по p надо предположить, что $a_{kp} \leqslant a_{k,\,p+1}$ для всех p и k, а ядерность пространства X будет обеспечена, если все H_k конечномерны и

$$\sum_k \dim H_k s_{\max}(a_{kp})/s_{\min}(a_{kp+1}) < \infty,\ \forall p,$$

где $s_{\max}$ и $s_{\min}$ означают наибольшее и наименьшее собственные значения положительно определенного оператора.

Если операторы a_{kp} при каждом фиксированном k и различных p, действующие в H_k, коммутируют, то они приводятся к диагональному виду в одном и том же ортонормированном базисе в H_k, и пространство (1.3) может быть представлено в виде 3°, т. е. в этом случае можно сделать все H_k одномерными. Если же a_{kp} не коммутируют,— для этого надо брать $\dim H_k > 1$,— то можно попробовать подобрать их так, что пространство (1.3) не имеет базиса. Такая конструкция и была осуществлена Зобиным и Митягиным [25, 16]. В дальнейшем, при сохранении основной схемы их рассуждений отдельные моменты доказательств были упрощены (подробное обсуждение общей схемы см. во введении к статье [7]). Ниже дано полное построение (с доказательством) одного из пространств Фреше X без базиса. Изложение основано на работе Джакова и Митягина [7, § 1, 2] и замечаниях к ней Бессаги [1] (см. также [48]).

В этом примере X типа (1.3), все H_k двумерны. Сначала разберем чисто двумерную ситуацию, построив «двумерное пространство без базиса». Точный смысл этим словам придает нижеследующая лемма.

Пусть в $\boldsymbol{R}^2$ (или в $\boldsymbol{C}^2$ — построение не зависит от того, будет ли X вещественным или комплексным пространством, и мы ограничимся случаем вещественного X) отмечен основной ортобазис e_0, e_1; положим $w_0 = (e_0+e_1)/\sqrt{2}$, $w_1 = (-e_0+e_1)/\sqrt{2}$,— тот же базис, повернутый на 45°. Для (достаточно большой) положительной постоянной M рассмотрим три эллипса

$$|x|_1^2 = |e_0'(x)|^2 + M^2|e_1'(x)|^2 \leqslant 1;$$
$$|x|_2^2 = M^2(M^2|e_0'(x)|^2 + |e_1'(x)|^2) \leqslant 1;$$
$$|x|_3^2 = M^4(|w_0'(x)|^2 + M^2|w_1'(x)|^2) \leqslant 1;$$

здесь функционал $f'(x) = (x, f)$. Это — гомотетия одного и того же эллипса $Э_1$, повернутого на 90 и на 45°; отношение полуосей каждого из них равно M, так что

$$|e_0|_1 |e_1'|_1 = |e_1|_2 |e_0'|_2 = |w_0|_3 |w_1'|_3 = 1/M. \qquad (1.4)$$

Лемма. *Пусть* $x = \sum T_k x$, $\forall x \in \boldsymbol{R}^2$, $\dim T_k = 1$, *и*

$$\sum |z'(T_k x)| \leqslant B |z'|_j |z|_j, \quad j = 1, 2, 3, \qquad (1.5)$$

для любых вектора $z \in R^2$ и функционала z', где нормы $|\cdot|_j$ определены соотношениями (1.4). *Тогда $B \geqslant M/4$.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что для любого одномерного оператора T справедливо неравенство

$$|e_0'(Te_0)| \leqslant |e_1'(Te_0)| + |e_0'(Te_1)| + 2|w_1'(Tw_0)|. \quad (1.6)$$

В силу однородности для проверки достаточно считать, что $e_0'(Te_0) = 1$, т. е.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & ab \end{pmatrix},$$

но в этом случае значения функционалов в правой части (1.6) равны соответственно b, a, $(-1+b-a+ab)/2$ и неравенство (1.6) принимает вид $1 \leqslant |a| + |b| + |1+a||1-b|$, что верно для любых (комплексных) чисел a и b. Поэтому неравенства (1.4), (1.5) вместе с соотношением $e_0 = \sum T_k e_0$ дают нам неравенства

$$1 = e_0'(e_0) = |\sum e_0'(T_k e_0)| \leqslant \sum (|e_1'(T_k e_0)| + |e_0'(T_k e_1)| + 2|w_1'(T_k w_0)|) \leqslant B(|e_1'|_1 |e_0|_1 + |e_0'|_2 |e_1|_2 + 2|w_1'|_3 |w_0|_3) \leqslant 4BM^{-1}$$

и тем самым $B \geqslant M/4$.

Конструкция. Выберем какое-то $1-1$-соответствие $\sigma: N \to \mathfrak{R}$, где N — натуральный ряд, а $\mathfrak{R}$ — (счетное) множество троек $(p_1, p_2; l)$, $p_1 < p_2$. Для каждого $n \in N$, $\sigma(n) = (p_1, p_2; l)$, строим операторы a'_{np}, полагая $M = 2^n$,

$$|a'_{np}x| = |x|'_p = \begin{cases} |x|_1, & 1 \leqslant p \leqslant p_1, \\ |x|_2, & p_1 < p \leqslant p_2, \\ |x|_3, & p_2 < p \end{cases} \quad (1.7)$$

и

$$a_{np} = n^{p-1} a'_{np}. \quad (1.8)$$

Последнее соотношение обеспечивает ядерность пространства X.

Если (f_k, f_k') — какой-то базис в так определенном пространстве (1.3), то соотношения

$$H_n \xrightarrow{J_n} X \xrightarrow{E_k} X \xrightarrow{P_n} H_n,$$

$$E_k = f_k'(\cdot) f_k; \quad J_n: h_n \to h_n = (0, \ldots, 0, h_n, 0, \ldots);$$

$$P_n: h \to h_n$$

порождают в двумерном H_n последовательность одномерных операторов $T_k = T_k^{(n)} = P_n E_k J_n$, причем $h = \sum T_k h$, $\forall h \in H_n$. Кроме того, по теореме об абсолютности базисов найдутся такие индексы норм p_1, p_2, p_3 и постоянная C, что

$$\sum |f_k'(x)| \|f_k\|_1 \leqslant C \|x\|_{p_1};$$
$$\sum |f_k'(x)| \|f_k\|_{p_1+1} \leqslant C \|x\|_{p_2};$$
$$\sum |f_k'(x)| \|f_k\|_{p_2+1} \leqslant C \|x\|_{p_3}, \qquad \forall x \in X.$$

После такого выбора по гипотетическому базису (f) индексов p_1, p_2, p_3 далее рассматриваем лишь те n, для которых $\sigma(n) = (p_1, p_2; l)$; так как l пробегает весь N, множество $N(p_1, p_2)$ таких n бесконечно. Посмотрим, к чему сводятся последние неравенства, если в них $x \in H_n$. (Помните о выборе (1.7)—(1.8) операторов a_{np}!) В этом случае

$$\sum |T_k h|_1 = \sum \|T_k h\|_1 \leqslant C \|h\|_{p_1} = C n^{p_1 - 1} |h_1|;$$
$$\sum |T_k h|_2 = \sum n^{-p_1} \|T_k h\|_{p_1+1} \leqslant C n^{-p_1} \|h\|_{p_2} =$$
$$= C n^{p_2 - p_1 - 1} |h|_2,$$

и, наконец,

$$\sum |T_k h|_3 = n^{-p_2} \sum \|T_k h\|_{p_2+1} \leqslant C n^{-p_2} \|h\|_{p_3} =$$
$$= C n^{p_3 - p_2 - 1} |h|_3.$$

Тем самым для системы $T_k = T_k^{(n)}$ одномерных операторов в H_n выполнены условия леммы с постоянной $B = C n^{p_3}$, и тогда по лемме

$$2^n \leqslant 4 C n^{p_3}, \; n \in N(p_1, p_2), \tag{1.9}$$

что противоречит бесконечности множества $N(p_1, p_2)$.

Такие же рассуждения показывают, что базиса не имеет и пространство $X \times Y$, где X — построенное выше, а Y — любое ядерное пространство Фреше. Кроме того, при определении операторов a_{np} (т. е. при задании системы норм в X) можно за M_n принять любую возрастающую последовательность с условием $\sum (\log M_n)^{-1} < \infty$ и положить $a_{np} = (\log M_n)^{p-1} a_{np}'$ вместо (1.8), что также будет приводить к противоречию $M_n \leqslant 4C \times (\log M_n)^{p_3}$, аналогичному (1.9).

Эти замечания дают возможность строить ядерные пространства без базиса со многими наперед заданными свойствами. Так, например, $X \times C^{\infty}(S^1)$ — ядерное пространство без базиса с максимальной (в классе ядерных пространств — см. критерий ядерности [21, теорема 7]) аппроксимативной и диаметральной размерностью. Если же, напротив, брать быстро растущие M_n, то можно получить X без базиса сколь угодно малой размерности. Другие изменения конструкции позволяют построить континуум попарно неизоморфных друг другу ядерных пространств Фреше без базиса (подробно см. Зобин — Митягин [17] и Джаков — Митягин [7, § 3]).

Отмечу, наконец, что в любом ядерном пространстве Фреше, не изоморфном декартову произведению счетного числа прямых, есть подпространство без базиса. Частные случаи разобраны в работах [6, 7 (§ 5) и 10], общий случай — в [11]. В основе построений (в частных и общем случаях) лежит следующий геометрический факт [7, § 5.4]: любая система двумерных эллипсов с осями $\{e_0, e_1\}$ или $\{w_0, w_1\}$ может быть получена как двумерное сечение некоторой системы соосных эллипсоидов в $\boldsymbol{R}^4$ (или $\boldsymbol{C}^4$).

Следует упомянуть, что задача о базисе в ядерном пространстве существенно отличается от той же задачи в банаховых пространствах. Энфло [28] построил банахово пространство, в котором нет не только базиса, но и никакой последовательности конечномерных операторов, сильно сходящейся к тождественному. В построенном выше (как и в любом ядерном) пространстве X такую последовательность указать очень легко: $Q_m = \sum_1^m P_n$; $P_n h = \tilde{h}_n$. Это обстоятельство потребовало иной техники доказательств.

§ 2. Квазиэквивалентность базисов в ядерном пространстве с регулярным базисом

Геометрически основной результат § 1 означает: в гильбертовом пространстве H существует система вложенных эллипсоидов $S(H) = Э_0 \supset Э_1 \supset \ldots \supset Э_n \supset \ldots$, не эквивалентная никакой системе соосных эллипсоидов. При этом мы говорим, что $(\varepsilon_n)_0^{\infty}$ — система соосных эллипсоидов в H если ε_0 ограничен в H, и в гильбертовом пространстве G с единичным шаром ε_0 все эллипсоиды ε_n, $n\geqslant 1$, имеют одни и те же направления главных полуосей, другими словами, самосопряженные положительно определенные операторы B_k, естественно возникающие в G по соотношениям

$$\varepsilon_k=\{x\in H: (B_k x, B_k x)\leqslant 1\},$$

коммутируют друг с другом. Две системы эллипсоидов $(Э)$ и (ε) мы называем *эквивалентными*, если для любого p найдутся q и постоянная C такие, что $\varepsilon_q\subset CЭ_p$ и $Э_q\subset C\varepsilon_p$. В терминах операторов (не совсем точно) тот же результат означает, что не любую монотонную систему с.п.о.с. операторов (A_n) можно заменить эквивалентной системой коммутирующих операторов.

Возможность такой замены для конкретных систем с.п.о.с. операторов — это и есть вопрос о существовании базиса в конкретных функциональных пространствах (чаще в пространствах бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций). Наиболее исследован вопрос о том, когда система A_n может быть заменена эквивалентной системой вида $B^{-1/n}$ или B^n, где B — с. п. о. с. оператор [21, § 8]. Именно такую форму имели стандартные примеры 1°, 2° в § 1. Развитая при этом техника и многие результаты о пространствах голоморфных функций могут быть найдены в работах Митягина — Хенкина [26] и Захарюты [14]; там же см. дальнейшую библиографию.

Но обсудим иной вопрос: о двух системах коммутирующих операторов. Пусть, как и выше, $1_H=A_0\leqslant\leqslant A_1\leqslant\ldots\leqslant A_n\leqslant\ldots$ — система коммутирующих друг с другом с. п. о. с. операторов и $Э_n=\{x\in H_n: (A_n x, A_n x)\leqslant 1\}$ — система эллипсоидов — единичных шаров порожденных ими гильбертовых пространств, а $\{B_k\}$ — эквивалентная монотонная система коммутирующих друг с другом с. п. о. с. операторов в гильбертовом пространстве G, причем

$$(x, x)_H\leqslant C(x, x)_G\leqslant C^2(x, x)_{A_{n_0}}, \qquad \forall x\in X$$

для некоторых натурального n_0 и постоянной $C>0$. Эквивалентность систем операторов A и B — то же, что эквивалентность систем эллипсоидов $Э$ и ε, или, другими словами, это совпадение двух пространств Фреше

$X_A = \bigcap \mathfrak{D}(A_n)$ и $X_B = \bigcap \mathfrak{D}(B_k)$ по запасу элементов и по топологии.

Вопрос 1. Существует ли такое линейное обратимое на X преобразование $U: X \to X$, что операторы UB_kU^{-1} коммутируют с операторами A_n, $\forall n, k$?

Конечно, этот вопрос можно переформулировать и чисто геометрически как вопрос о приведении одной системы соосных эллипсоидов $\mathcal{Э}$.

Каждая система коммутирующих операторов (A_n) естественно порождает базис в X — надо взять за $\{e_k\}$ систему общих взаимно ортогональных в любом $H(A_n)$ собственных векторов этих операторов:

$$A_p e_k = a_{kp} e_k, \tag{2.1}$$

— и мы приходим к реализации пространства $X = X_A$ в виде пространства Кёте 3° из § 1. С системой (B_k) также связан другой базис $\{f_j\}$ в $X: B_k f_j = b_{jk} f_j$, что приводит ко второй реализации того же X как пространства Кёте. Поставленный выше вопрос эквивалентен следующему:

Вопрос 2. Существуют ли такие нормировка r_j, перестановка $\sigma: N \to N$ и обратимый в X оператор V, что $Vf_j = r_j e_{\sigma(j)}$?

Если для базисов (f) и (e) ответ на этот вопрос положителен, то они называются *квазиэквивалентными*. Эти вопросы начали интенсивно исследоваться после работы Драгилева [8], где было доказано, что в пространстве $H(\mathscr{D}^1)$ голоморфных функций в единичном круге все базисы квазиэквивалентны степенному. Обзор результатов (Драгилев, Митягин, Захарюта) в этом направлении, полученных до 1970 г. можно найти в докладе [23]. Недавно был полностью решен положительно Вопрос 2 (и тем самым — Вопрос 1) в случае ядерных пространств с регулярным базисом (см. определение в § 1), т. е. в том случае, когда $X \simeq X_A$ и

$$\sum a_{kp}/a_{kp+1} < \infty; \quad a_{kp}/a_{kp+1} \downarrow 0, \quad k \to \infty. \tag{2.2}$$

Решение независимо было дано Кондаковым [18] и Кроном и Робинсоном [19]. Следуя Джакову, приведем здесь (схему) решение этих вопросов.

Существенным моментом доказательства является

Лемма Драгилева [9, теорема 1]. *Если в ядерном пространстве Фреше X есть регулярный базис, то любой базис можно сделать регулярным некоторой перестановкой индексов и выбором соответствующей эквивалентной системы (полу)норм.*

Это утверждение позволяет считать, что в Вопросах 1 и 2 не только для системы (A), но и для системы (B) выполнены условия типа (2.2):

$$\sum b_{jm}/b_{jm+1}<\infty; \quad b_{jm}/b_{jm+1}\downarrow 0, \quad j\to\infty \ \forall m.$$

Условие регулярности делает особенно простым подсчет относительных полуосей (или *n-поперечников* — см. выше (1.2)):

$$d_n(\mathcal{E}_q, \mathcal{E}_p)=a_{np}/a_{nq}; \ d_n(\varepsilon_q, \varepsilon_p)=b_{np}/b_{nq}.$$

Так как системы операторов (A) и (B) эквивалентны, или, что то же, эквивалентны системы эллипсоидов $(\mathcal{E})$ и (ε) соответственно, то можно без ограничения общности считать, что

$$\mathcal{E}_1\supset\varepsilon_1\supset\mathcal{E}_2\supset\varepsilon_2\supset\ldots\supset\mathcal{E}_p\supset\varepsilon_p\supset\mathcal{E}_{p+1}\supset\ldots$$

Действительно, этого легко добиться, переходя в исходных системах к подпоследовательности и осуществляя в них нормировку. Тогда при любых p и q выполнены неравенства

$$a_{np}/a_{nq+1}\leqslant b_{np}/b_{nq}, \quad n>0. \tag{2.3}$$

Докажем это. Если $p\leqslant q$, то $\mathcal{E}_p\supset\varepsilon_p\supset\varepsilon_q\supset\mathcal{E}_{q+1}$ и в силу минимаксных свойств s-чисел операторов в гильбертовом пространстве (подробнее см. [21], § 2; [3], гл. 2)

$$a_{np}/a_{nq+1}=d_n(\mathcal{E}_{q+1}, \mathcal{E}_p)\leqslant d_n(\varepsilon_q, \varepsilon_p)=b_{np}/b_{nq}.$$

Если же $p>q$, то $\varepsilon_q\supset\mathcal{E}_{q+1}\supset\mathcal{E}_p\supset\varepsilon_p$ и по тем же соображениям

$$a_{nq+1}/a_{np}=d_n(\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_{q+1})\geqslant d_n(\varepsilon_p, \varepsilon_q)=b_{nq}/b_{np},$$

так что во всех случаях выполнены неравенства (2.3). Но тогда

$$a_{np}/b_{np}\leqslant a_{nq+1}/b_{nq}, \ \forall p, q, \ \forall n\geqslant 0$$

и для каждого n

$$\sup_p a_{np}/b_{np}\leqslant\inf_q a_{nq+1}/b_{nq},$$

так что можно в этих зазорах выбрать такие $r_n > 0$, что

$$a_{np} \leqslant r_n b_{np} \leqslant a_{np+1}, \quad \forall p. \tag{2.4}$$

Оператор U, определяемый соотношениями $Uf_j = r_j^{-1} e_j$, будет линейным обратимым оператором в X, в чем легко убедиться благодаря неравенствам (2.4), подсчитывая A-нормы или B-нормы векторов $y = \sum r_j x_j f_j$ и $x = Uy = \sum x_j e_j$.

В общем случае (нерегулярные базисы или системы операторов без какой-либо правильности в асимптотике их собственных значений) Вопросы 1 и 2 еще не решены. Правда, разобран [22, 24] один важный случай (неядерный и нерегулярный) систем вида

$$A_n = A^{-1/n} \text{ или } A^n, \text{ где } A \geqslant 1 \tag{2.5}$$

и A — с.п.о.с. оператор, имеющий бесконечномерные инвариантные подпространства в ограниченной части спектра, и его модификация —

$$A_n = A^{-1/n} B^n,$$

где A, B — коммутирующие операторы с некоторыми дополнительными свойствами [15]. Об этом случае и возникающих в связи с ним общих линейно-топологических инвариантах — несколько слов в следующем параграфе.

§ 3. Инварианты пространств с нерегулярным базисом

Говоря в терминах примера 4° из § 1, операторы (2.5) действуют в гильбертовом пространстве $H = (H_k)^2$; оператор A — блочнодиагональный, т. е. A: $(h_k) \to (A_k h_k)$, и спектр $\sigma(A|H_k)$ на оси $(1, \infty)$ лежит правее $\sigma(A_{k-1})$ при каждом k,— это какое-то подобие монотонности (регулярности),— но на $\delta_k = \dim H_k$ никаких ограничений нет. Поэтому в последовательности δ_k могут чередоваться конечные числа и ∞ как угодно и это исключает даже при дискретном спектре $\sigma(A) = \{a_j\}$ возможность монотонного расположения чисел последовательности $\sigma(A)$. Примерами таких (функциональных) пространств могут быть пространства $\mathfrak{H}$-значных гладких или голоморфных функций.

Как и в примерах 1°, 2° из § 1, положим

$$H=l^2(\mathbf{Z}, \mathfrak{H}) \text{ или } H=l^2(\mathbf{Z}_+, \mathfrak{H}),\ \dim \mathfrak{H}=\infty,$$

и

$$A_p h_k=(1+k^2)^p h_k,$$

или

$$A_p h_k=2^{p|k|} h_k \quad (A_p h_k=2^{-|k|/p} h_k)$$

соответственно, где $h=(h_k)\in H$, если

$$\|h\|^2=\sum (h_k, h_k)_{\mathfrak{H}}<\infty.$$

Показано [24, теорема 0], что в случае (2.5) в пространстве $\varepsilon_A=\bigcap \mathfrak{D}(A_n)$ все безусловные базисы квазиэквивалентны, или, другими словами, для любой эквивалентной системы коммутирующих операторов $\{B_m\}$ можно найти такой линейный обратимый оператор $V: X\to X$, что все операторы VB_mV^{-1} и A_n коммутируют друг с другом. В частности, безусловные базисы квазиэквивалентны в следующих пространствах (здесь $\mathfrak{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство):

1°. $C^\infty(M; \mathfrak{H})$ — бесконечно дифференцируемые $\mathfrak{H}$-значные функции на компактном C^∞-многообразии M;

2°. $H(\mathscr{D}^n; \mathfrak{H})$ — голоморфные $\mathfrak{H}$-значные функции в открытом полидиске $\mathscr{D}^n=\{z\in\mathbf{C}^n: |z_j|<1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$ и, более общо, аналогичное пространство $H(G, \mathfrak{H})$, где G — строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^n$;

3°. $H(\mathbf{C}^n; \mathfrak{H})$ — целые векторнозначные функции. (В случае 2° использован факт изоморфизма пространств числовых функций $H(\mathscr{D}^n)$ и $H(G)$, установленный Митягиным — Хенкиным [16, § 2 и 3].)

При анализе подобных пространств, к которым в случае некомпактного A^{-1} инварианты Колмогорова и Пелчинского (диаметральная и аппроксимативная размерности) неприменимы, возникли инварианты [24, § 3 и 4 и пример 17], связанные не только с асимптотикой, но и с более детальной структурой спектра оператора A (в (2.5) или операторов системы (A_n) в общем случае). Так, для двух операторов $A, B\geqslant 1$ эквивалентны следующие условия:

а) изоморфны пространства

$$\varepsilon_0(A)=\bigcap_1^\infty \mathfrak{D}(A^{-1/n}) \text{ и } \varepsilon_0(B);$$

б) изоморфны пространства

$$\varepsilon_\infty(A) = \bigcap \mathfrak{D}(A^n) \text{ и } \varepsilon_\infty(B);$$

в) найдется такая постоянная $R>0$, что

$$\dim E(B;\ Rx^R,\ R^{-1}y^{1/R}) \leqslant \dim E(A;\ x,\ y) \leqslant$$
$$\leqslant \dim(B;\ R^{-1}x^{1/R},\ Ry^R)$$

для любых $x, y>1$.

Пространства типа ε_0 и ε_∞ не могут быть изоморфны друг другу, если A или B — неограниченный оператор. Здесь $E(A;\ x,\ y)$ означает ортогональное проектирование на инвариантное подпространство A, соответствующее отрезку $[x,\ y]$ в его спектре.

Это утверждение, например, приводит к изоморфизму пространств 1°, 3° между собой, а также в случаях 2° и 3° — внутри этих групп при разных n. 2° от 1° и 3° отличается типом — ε_0 или ε_∞. В случаях 1°, 3°, как видно из оценок коэффициентов Фурье (если $M=T^m$ — m-мерный тор) или Тейлора $H=(H_k)_{l^2}$, $\dim H_k=\infty$, и

1°. $B|H_k=B^{(k)}$ — скалярный оператор умножения на $k=2^{\log k}$;

$\overset{\circ}{3}_n \cdot B_n\,|\,H_k = B_n^{(k)}$ — скалярный оператор умножения на $2^{k\alpha}$, где $\alpha=1/n$.

Так как $\alpha\leqslant 1$, во всех этих случаях последовательность $\log k$ или k^α, $\alpha\leqslant 1$, имеет в каждом из отрезков $[i,\ i+1)$ хотя бы по одной точке. Заменим каждый из наших операторов B на оператор $B'=\sum\limits_1^\infty iE(B;\ [i,\ i+1))$. Очевидно, $B'\leqslant B\leqslant 2B'$, так что B и B' порождают эквивалентные пространства. Но так как $\dim E(B;\ [i,\ i+1))=$ $=\infty$ для всех $i=1, 2, \ldots$ для любого B из 1°, 3°, то тип B' от исходного B существенно не зависит и все пространства 1°, 3° попарно изоморфны. То же можно сказать о пространствах 2° при разных n. Но если в случае 3° рассмотреть $\alpha>1$ („функции от n комплексных переменных", где $n=1/\alpha<1$), то получится серия попарно неизоморфных при разных $\alpha>1$ пространств.

В обобщение критерия в) Захарюта [13] придал оценкам спектра самосопряженных операторов из [24, § 3] инвариантную форму. Так возникает серия линейно-топологических инвариантов счетногильбертовых про-

8 Заказ № 404

странств с (безусловным) базисом, или, что то же, инвариантов счетных систем коммутирующих с. п. о. с. операторов $(A_p)_0^\infty$.

Пусть выполнены соотношения (2.1) и $a_{kp} \leqslant a_{kp+1}$, но по k никакой упорядоченности, вообще говоря, нет. При определении диаметральной размерности существенны наборы функций

$$N^-(p_0, p_1; t) = |\{k : a_{p_1}(k)/a_{p_0}(k) \leqslant t\}| = \dim E\left(A_{p_1}A_{p_0}^{-1}; t\right), \quad p_0 \leqslant p_1,$$

где $t \geqslant 1$ и $t \to \infty$. Теперь внимательно следя не только за кусками спектров в отрезках $[0, t]$, для любого (нечетного) набора индексов $\mathscr{P} = (p_0, p_1, \ldots, p_{2n})$ определим функции от многих переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, полагая

$$N(\mathscr{P}; x, y) = |\{k : a_{p_{2j+1}}(k)/a_{p_{2j}}(k) \geqslant e^{x_{j+1}};$$
$$a_{p_{2j+2}}(k)/a_{p_{2j+1}}(k) \leqslant e^{y_{j+1}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\}| = \tag{3.1}$$
$$= \dim \prod_{j=0}^{n-1} E'\left(A_{p_{2j+1}}A_{p_{2j}}^{-1}; e^{x_{j+1}}\right) E\left(A_{2j+2}A_{2j+1}^{-1}; e^{y_{j+1}}\right).$$

(Если $|\mathscr{P}|$ четно, то следовало бы опустить переменную x_1 или y_n и неравенства и соотношения, в которых они участвуют, при этом возникли бы еще две системы функций N^+ и N^-.) Каждый из этих наборов дает инвариант системы операторов (A_n), или — что то же — линейно-топологический инвариант в классе пространств $\varepsilon_A = \bigcap_0^\infty \mathfrak{D}(A_p)$ с базисом. Точный смысл этому придает

Лемма. *Если (A_p) и (B_n) — эквивалентные системы коммутирующих операторов, то*

$$\forall p_0' \exists p_0 \forall p_1 \exists p_1' \forall p_2' \ldots \forall p_{2n}' \exists p_{2n}, \quad T > 0:$$
$$\forall x, y \,|\, N_A(\mathscr{P}; x, y) \leqslant N_B(\mathscr{P}'; x - Te, y + Te),$$

где $e = (1, 1, \ldots, 1)$ и аналогичное соотношение выполнено, если A и B поменять ролями.

Подобное утверждение верно, если рассмотреть четные наборы $\mathscr{P}$ индексов и функции N^+ или N^-.

Доказательство. Ограничимся разбором случая трех индексов, т. е. покажем, что

$$\forall p' \exists p \forall q \exists q' \forall r' \exists r,\ T>0\ \forall x,\ y:$$
$$N_B(p,\ q,\ r;\ x,\ y) \leqslant N_A(p',\ q',\ r';\ x-T,\ y+T),$$

если монотонные системы (A) и (B) эквивалентны и внутри каждой системы операторы попарно коммутируют. В силу эквивалентности

$$\forall p' \exists p,\ C_1: |x|_{A_{p'}} \leqslant C_1 |x|_{B_p},$$
$$\forall q \exists q',\ C_2: |x|_{B_q} \leqslant C_2 |x|_{A_{q'}}$$

и, наконец,

$$\forall r' \exists r,\ C_3: |x|_{A_{r'}} \leqslant C_3 |x|_{B_r}.$$

Чтобы упростить обозначения, будем думать, что выполнены соотношения

$$|x|_{A_1} \leqslant C_1 |x|_{B_1} \leqslant C_1 |x|_{B_2} \leqslant C_1 C_2 |x|_{A_2} \leqslant C_1 C_2 |x|_{A_3} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 C_2 C_3 |x|_{B_3}$$

и надо доказать, что $\exists \tau = e^{-T} \forall u,\ v$:

$$|\{k: b_2(k)/b_1(k) \geqslant u;\ b_3(k)/b_2(k) \leqslant v\}| \leqslant$$
$$\leqslant |\{l: a_2(l)/a_1(l) \geqslant \tau u;\ a_3(l)/a_2(l) \leqslant \tau^{-1} v\}|.$$

Интересующие нас числа — это размерности гильбертовых подпространств

$$Y_b = \operatorname{Im}\{E'(B_2 B_1^{-1};\ u) E(B_3 B_2^{-1};\ v)$$

и

$$Y_a = \operatorname{Im}\{E'(A_2 A_1^{-1};\ \tau u) E(A_3 A_2^{-1};\ \tau^{-1} v),$$

и для их сравнения полезно такое замечание [24, лемма 6]: если существует непрерывный оператор $S: Y_b \to Y_a$, переводящий в нуль только нуль, то $\dim Y_b = \dim Y_a$. Проверим, что при $\tau = [C_2(C_1 + C_3)]^{-1}/2$ оператор $S = Q_1 Q_3: Y_b \to Y_a$ будет мономорфизмом; мы полагаем

$$R_1 = E'(B_2 B_1^{-1};\ u);\quad R_3 = E(B_3 B_2^{-1};\ v);$$
$$Q_1 = E'(A A_1^{-1};\ \tau u);\quad Q_3 = E(A_3 A_2^{-1};\ \tau^{-1} v).$$

Далее оценки аналогичны оценкам § 3.3 в [24]. Если $x \in Y_b$ и $Sx = 0$, то $x = R_1 x = R_3 x = R_1 R_3 x$ и $Q_1 Q_3 x = 0$, так что $x=(1-Q_1)x+Q_1(1-Q_3)x$, поэтому

$$\begin{aligned}|x|_{A_2}&\leqslant|(1-Q_1)R_1x|_{A_2}+|(1-Q_3)Q_1R_3x|_{A_2}\leqslant\\&\leqslant\tau u|R_1x|_{A_1}+\tau v^{-1}|R_3x|_{A_3}\leqslant C_1\tau u|R_1x|_{B_1}+\\&+v^{-1}C_3\tau|R_3x|_{B_3}\leqslant u^{-1}C_1\tau u|R_1x|_{B_2}+\\&+v^{-1}C_3\tau v|R_3x|_{B_2}\leqslant(C_1+C_3)\tau|x|_{B_2}\leqslant\\&\leqslant C_2(C_1+C_3)\tau|x|_{A_2}=2^{-1}|x|_{A_2},\end{aligned}$$

так что $|x|_{A_2}=0$ и $x=0$. (В этих оценках неоднократно было использовано неравенство Чебышева — Бернштейна.) Лемма тем самым доказана.

Итак, наборы функций (3.1) дают серию инвариантных пространств ε_A. В конкретных случаях разнообразными предельными переходами (по выделенным направлениям (x, y)) можно организовывать числовые инварианты типа функциональной размерности [2, гл. 1.7]. В частности, Захарюта [13] анонсировал существование континуума попарно неизоморфных пространств $H(G)$, где $G\subset G^n$ — полные (неограниченные) краткокруговые области.

Следует обратить внимание на связи рассмотрений этого параграфа с анализом $*$-алгебр неограниченных операторов [20]. При этом возникает вопрос о том, можно ли построить ядерное пространство Фреше $\varepsilon_A=\bigcap\mathfrak{D}(a)$ без базиса, совпадающее с общей областью определения операторов некоторой $*$-алгебры?

§ 4. Абсолютно суммирующие операторы

В анализе операторов в банаховых пространствах в последнее десятилетие заметное место заняли различные классы абсолютно суммирующих операторов. Основные, идущие от Гротендика, понятия характеризуют, *как* линейный оператор $T:X\to Y$, действующий в паре банаховых пространств, преобразует безусловно сходящийся ряд.

Определение. Оператор $T:X\to Y$ называется *абсолютно суммирующим*, или *квазиинтегральным*, если для любого безусловно сходящегося ряда $\sum x_k$ в X сходится ряд норм $\sum\|Tx_k\|<\infty$, другими словами, если существует такая постоянная M, что

$$\sum_1^n \| Tx_k \| \leqslant M \sup_{x^* \in X', \|x^*\| \leqslant 1} \sum_1^n |\langle x^*, x_k \rangle| \tag{4.1}$$

для любых конечных наборов $(x_k)_1^n \subset X$. В обобщение этого понятия Митягин и Пелчинский [38] предложили понятие (p, q)-*абсолютно суммирующего* оператора (класс Π_{pq}): оператор $T: X \to Y$ входит в класс $\Pi_{pq}(X, Y)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной M выполнено условие

$$\left(\sum_1^n \| Tx_k \|^p\right)^{1/p} \leqslant M \sup_{x^* \in X', \|x^*\| \leqslant 1} \left(\sum_1^n |\langle x^*, x_k \rangle|^q\right)^{1/q} \tag{4.2}$$

для всех наборов $(x_k)_1^n \subset X$. Его норма $\pi_{pq}(T)$ определяется как наименьшая из таких постоянных M.

При изучении (p, p)-, или просто p-абсолютно суммирующих операторов весьма полезна их характеризация с помощью *неравенства Гротендика—Питша*: $T \in \Pi_{pp}(X, Y)$ тогда и только тогда, когда существует мера Радона μ на $K = \operatorname{Ext} S(X')$, множестве крайних точек единичного шара сопряженного пространства X', такая, что

$$\| Tx \| \leqslant \left(\int_K |\langle x^*, x \rangle|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \operatorname{Var} \mu = (\pi_p(T))^p. \tag{4.3}$$

Достаточность такой оценки для p-абсолютной суммируемости оператора T очевидна. Необходимость устанавливается, например, так (подробнее см. [36]). Пространство X изометрически вложено в $C(K)$: $x \to \langle \cdot, x \rangle$. В $C(K)$ для каждого набора

$$\xi = (x_k)_1^n, \quad \text{где} \quad \sum_1^n \| Tx_k \|^p = 1, \tag{4.4}$$

рассмотрим функцию

$$g_\xi(x^*) = M \cdot \sum_1^n |\langle x^*, x_k \rangle|^p.$$

Так как

$$\alpha g_\xi + \beta g_\eta = g_{\alpha^{1/p}\xi + \beta^{1/p}\eta}, \qquad \forall \alpha, \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1,$$

то это семейство $\{g_\xi\}$ — выпуклое (!) множество в $C(K)$, и так как, в силу (4.2), $p = q$, имеем $\sup\limits_{x^* \in K} g_\xi(x^*) \geqslant 1$, $\forall \xi$ с условием (4.4), то это множество W (и его замыкание $\overline{W}$ в $C(K)$) не пересекается с открытым множеством

$$U = \{f \in C(K) : f(x^*) < 1, \ \forall x^* \in K\}.$$

Разделяющий $\overline{W}$ и U в $C(K)$ функционал и порождает меру μ, для которой выполнено неравенство (4.3).

Это неравенство и дало повод (Перссон — Питш [42]) называть p-абсолютно суммирующие операторы *p-квазиинтегральными* как операторы, пропускаемые через тождественное вложение некоторого подпространства $C(K)$ в его пополнение в $L^p(\mu)$. Если же оператор факторизуется через полный оператор тождественного вложения $j:C(K)\to L^p(\mu)$, то он называется *p-интегральным*; в классе $I_p(X, Y)$ p-интегральных операторов естественно вводится [42] норма I_p и этот класс сам становится банаховым пространством.

Другим фундаментальным фактом является *теорема Гротендика*: всякий непрерывный оператор T из l_1 или $L_1(\sigma)$ в гильбертово H является абсолютно суммирующим. Доказательство и интересные обобщения и обсуждения этой теоремы см. в [36].

Как пример использования понятия абсолютно суммирующего оператора в конкретном анализе приведем следующее

Предложение. *Пусть* $\{\varphi_k, \overset{*}{\varphi}_k\}$ — *биортогональная система в* $L^2(0, 2\pi)$, *полная, тотальная и нормированная, т. е.* $\langle\overset{*}{\varphi}_k, \varphi_i\rangle=\delta_{ik}$, $\forall i, k$, *и линейные оболочки как системы* $\{\varphi_k\}$, *так и системы* $\{\overset{*}{\varphi}_k\}$ *плотны в* $L^2(0, 2\pi)$. *Тогда найдется функция* $f\in\mathrm{Lip}\, 1/2$, *т. е.*

$$|f(x)-f(x')|\leqslant C|x-x'|^{1/2},\quad \forall x,\ x'\in S^1=[0,\ 2\pi],\ 0\equiv 2\pi,$$

такая, что $\sum|\overset{*}{\varphi}_k(f)|=\infty$.

Это небольшое усиление результата [37], где речь шла о полных ортонормированных системах $\{\varphi_k\}$.

Доказательство (схема). Предположим, что ряд $\sum|\overset{*}{\varphi}_k(f)|$ сходится для любой $f\in\mathrm{Lip}\,1/2$. Тогда оператор $\Phi:Y\to l_1$, определяемый соотношением $\Phi: f\to\{\overset{*}{\varphi}_k(f)\}$, замкнут, всюду определен и потому ограничен. Из l_1 в L_2 действует оператор R, $R:(\xi_k)_1^\infty\to\sum_1^\infty\xi_k\varphi_k$. Наконец, рассмотрим оператор $\Lambda:C(S^1)\to\mathrm{Lip}\,1/2$, действующий по формуле

$$(\Lambda f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(x-y)f(y)\,dy,$$

где $\lambda(u)=|u|^{-1/2}$, $-\pi\leqslant u\leqslant+\pi$. Коэффициенты Фурье (λ_n) этой функции имеют асимптотику $|\lambda_n|\asymp 1/\sqrt{|n|}$, так что

$$\sum|\lambda_n|^2=\infty. \tag{4.5}$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Lip}^{1/2} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "J"] & l_1 \arrow[d, "R"] \\
C(S^1) \arrow[u, "\Lambda"] \arrow[r, "\widetilde{\Lambda}"'] & L_2(S^1)
\end{tikzcd}$$

Так как система $\{\varphi_k, \overset{*}{\varphi}_k\}$ полная и тотальная, произведение $R\Phi=J$ есть просто оператор тождественного вложения. Но по теореме Гротендика R — абсолютно суммирующий, так что абсолютно суммирующим должен быть и оператор $\widetilde{\Lambda}=R\Phi\Lambda$. Это неверно в виду (4.5), как показывает

Лемма. *Если $T:C(S^1)\to L_2(S^1)$ — мультипликатор, т. е. $T:\exp inx\to t_n\exp inx$, $n\in\boldsymbol{Z}$, то в этих пространствах T абсолютно суммирующий тогда и только тогда, когда $\sum|t_n|^2<\infty$.*

Это доказано в [37] рассмотрением конкретных наборов ступенчатых функций (с. 1050). Общие соображения об инвариантности и основные факты об абсолютно суммирующих операторах также могут быть (см. ниже § 5) использованы для доказательства этой леммы.

Выяснение для конкретных классов (сингулярных) операторов в пространствах типа Соболева, какому классу Π_{pq} или I_p они принадлежат,— важная и существенная в ряде приложений задача.

В случае гильбертова пространства H уже давно были замечены связи классов Π_{pq} с классами Неймана — Шаттена S_r. Напомню (подробнее см. [3], гл. 2), что S_r, $1\leqslant r<\infty$,— пространство всех компактных линейных операторов T в H, для которых $\sum s_n^r<\infty$, где $s_n=s_n(T)$, $n=0, 1, \ldots$,— собственные числа оператора $(T^*T)^{1/2}$, упорядоченные по убыванию с учетом кратности; S_∞

обозначает класс всех ограниченных операторов в H.

Если $p=q<\infty$, то $\Pi_{pq}(H)=S_r$; случай $p=1$ и был рассмотрен Гротендиком [31], в общем случае это доказано Пелчинским [40].

Если $p=\infty$ или $1/q-1/p\geq 1/2$, то $\Pi_{pq}(H)=S_\infty$; случай — основной — $p=2$, $q=1$ разобран Орличем (1933); подробнее см. Квапен [33].

Если $1/q-1/p=1/2-1/r<1/2$ и $q\leq 2$, то $\Pi_{pq}(H)=S_r$— это доказано Митягиным [33]. Было также замечено, что $S_{2p/q}\subset\Pi_{pq}$, если $2<q<p<\infty$, то эта область параметров до последнего времени оставалась неразобранной. Совсем недавно Г. Беннет [29] понял, что в этой области точные ответы следует искать в операторных классах Лоренца S_{rt}, $1<r$, $t<\infty$, т. е. пространствах компактных операторов T, таких, что $\sum n^{t/r-1}s_n(T)^t<\infty$. Г. Беннет показал, что в случае $2<q<p<\infty$ $S_{2p/q,\,p}\subseteq\Pi_{pq}$, причем имеет место равенство, если q — четное натуральное число. Замена теоретико-числовых конструкций [29] стохастическими соображениями позволила Г. Беннету, В. Гудману и Ч. Ньюману [30] до конца разобрать этот случай: показано, что $\Pi_{pq}(H)=S_{\frac{2p}{q},p}$, если $2<q<p<\infty$.

Отметим существенное утверждение о случайных матрицах [30].

Пусть $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ —*матрица* $(m\times n)$, *элементы которой суть независимые случайные величины с нулевым средним, и* $|a_{ij}|\leq 1$ *для всех* i, j. *Если* $2\leq q<\infty$, *то существует постоянная* K, *зависящая только от* q, *такая, что*

$$\text{Мат. ожид. } \|A\|_{2q}\leq K\max\{m^{1/q},\, n^{1/2}\},$$

где $\|A\|_{2q}$ *обозначает норму оператора* $A: l_n^2\to l_m^q$.

Так описываются (p, q)-абсолютно суммирующие операторы в гильбертовом пространстве.

§ 5. Неизморфизмы банаховых пространств гладких и голоморфных функций

Классы $\Pi_{pq}(X, Y)$ как производные объекты банахова пространства X (или Y) несут в себе информацию о нем, и естественно в терминах этих классов описывать какие-то инварианты пространства X. Этот параграф основан на совместных работах А. Пелчинского и автора и подробных обсуждениях ими результатов Г. М. Хенкина, С. В. Кислякова и др.

1. Характерным свойством пространства $C(K)$ непрерывных функций на компакте является следующее.

(А) Всякий абсолютно суммирующий оператор $T: C(K) \to l^2$ переводит ограниченное множество в структурно ограниченное, т. е.

$$T(S(C(K))) \subset \sigma_b = \{x = \\ = (x_k)_0^\infty \in l^2 : |x_k| \leqslant b_k, \quad 0 \leqslant k < \infty\}$$

для некоторого $b \in l^2$.

Действительно, по неравенству (4.3) существует мера μ на K такая, что $\|Tx \mid l^2\| \leqslant \int\limits_K |x(t)|\, d\mu(t)$ и тем самым оператор T распространяется по непрерывности до оператора $\widetilde{T}: L_1(K, \mu) \to H = l^2$. Для таких операторов [32, теорема VI.8.10] возможно представление

$$\widetilde{T}f = \int\limits_K f(t)\, h(t)\, d\mu(t),$$

где $h(t)$ — измеримая H-значная функция, причем $\operatorname{ess\,sup} \|h(t)\| = \|\widetilde{T}\|$, и в нашем случае $\leqslant 1$. Положим $b_k = \sup\, \{|\langle e_k', Tf \rangle| : |f|_\infty \leqslant 1\}$, где e_k' — координатные функционалы в l^2. Тогда

$$b_k = \sup_{|f|_\infty \leqslant 1} \int\limits_K \langle e_k', h(t) \rangle f(t)\, d\mu(t) \leqslant \\ \leqslant \mu(K)^{1/2} \left(\int\limits_K |\langle e_k', h(t) \rangle|^2 d\mu \right)^{1/2},$$

$$\sum b_k^2 \leqslant \mu(K) \int\limits_K \sum |\langle e_k', h(t) \rangle|^2 d\mu = \\ = \mu(K) \int\limits_K \|h(t)\|^2 d\mu \leqslant \mu(K)^2 = \pi_1(T)^2 < \infty.$$

В связи с утверждением (А) см. [34]; о структурно ограниченных множествах в гильбертовом H см. [45]; частным случаем (А) является, как нетрудно видеть, лемма из § 4.

2. Г. М. Хенкин доказал [46], что пространство гладких функций $C^k(T^n)$, $k\geq 1$, на n-мерном торе (кубе, сфере), $n\geq 2$, не изоморфно пространству $C(K)$.

С. В. Кисляков [35] воспользовался свойством (А) для доказательства этого неизоморфизма и более сильного утверждения:

(В) пространство $C^k(M^n)$, $k\geq 1$, $n\geq 2$, не может быть фактор-пространством $C(K)$:

Так как в случае тора усреднением по отдельным переменным можно проектировать $C^k(T^n)\overset{\text{на}}{\to} C^k(T^2)$, то достаточно доказать утверждение в случае $n=2$.

Неравенство

$$\|f\,|\,L^2\|\leqslant\|f\,|\,L^1\|+\int\limits_{T^2}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\right)\frac{dx_1dx_2}{4\pi^2},$$

доказанное В. П. Ильиным, а также Гальярдо и Л. Ниренбергом [44, § V.2.5], показывает, что оператор $J:C^1(T^2)\to L_2(T^2)$ тождественного вложения является абсолютно суммирующим.

Если $h: C(K)\overset{\text{на}}{\to} C^k(T^2)$, то для ограниченной системы $E_p=(1+p_1^2+p_2^2)^{-k/2}\exp i(p_1x_1+p_2x_2)$ векторов в $C^k(T^2)$ найдутся (по теореме Банаха об открытом отображении) векторы f_p такие, что

$$h(f_p)=E_p,\ p=(p_1,\ p_2)\in \mathbf{Z}^2,\ \text{и}\ \sup_p\|f_p\|=M<\infty.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C^k(T^2) & \xrightarrow{D_1^{k-1}} & C^1(T^2) \\ h\uparrow & & J\downarrow \\ C(K) & \xrightarrow{H} & L_2(T^2), \end{array},$$

где $D_1=\partial/\partial x_1$ и $H=JD_1^{k-1}h$. Результирующий оператор H должен, как и J, быть абсолютно суммирующим, и тогда в силу (А) он переводит семейство f_p в структурно ограниченное множество $Hf_p=p_1^{k-1}E_p$. Но так как

$$\sum_{p\in\mathbf{Z}^2}\left[\frac{p_1^{k-1}}{(1+p_1^2+p_2^2)^{k/2}}\right]^2>\sum_1^\infty 2q\cdot\frac{q^{2k-2}}{(1+2q^2)^k}>\frac{2}{3^k}\sum\frac{1}{q}=\infty,$$

то образ $H(S(C(K)))$ не структурно ограничен. Предложение (В) доказано.

3. Сравнение p-квазиинтегральных операторов и p-интегральных операторов в пространствах $A(\mathscr{D}^k)$ голоморфных в открытом и непрерывных в замкнутом полидиске $\mathscr{D}^k=\{z\in C^k: |z_j|\leqslant 1,\ 1\leqslant j\leqslant k\}$ функций позволяет передоказать неизоморфизм

$$A(\mathscr{D}^1)\not\simeq A(\mathscr{D}^k),\ k\geqslant 2,$$

установленный Г. М. Хенкиным [47] с помощью иных инвариантов.

Вот схема наших (А. Пелчинского и автора) рассуждений.

Лемма 1. *Оператор тождественного вложения* j_p: $A(\mathscr{D}^k)\to H^p(\mathscr{D}^k)$, $1<p<\infty$, *является p-интегральным и его норма*

$$I_p(j_p)=(B(p))^k, \tag{5.1}$$

хотя $\pi_p(j_p)=1$.

Здесь $B(p)$ — норма проектора Коши — Гильберта Q из $L^p(S^1)$ на $H^p(\mathscr{D}^1)$, т. е. $Q: e^{inx}\to\nu(n)\,e^{inx}$, $\nu(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0,\\ 0, & n<0.\end{cases}$ Это доказано А. Пелчинским [41] на основании соображений инвариантности.

Лемма 2. *Всякий p-квазиинтегральный оператор* $T: A(\mathscr{D}^1)\to Y$, $1<p<\infty$, *является p-интегральным и*

$$I_p(T)\leqslant B(p)\cdot\pi_p(T); \tag{5.2}$$

оператор $j_p: A(\mathscr{D}^1)\to H^p(\mathscr{D}^1)$ *показывает, что* $B(p)$ — *неулучшаемая постоянная.*

Так как $B(p)\asymp\frac{p^2}{p-1}$ стремится к ∞ при $p\to\infty$ или $p\to 1$, то сопоставление соотношений (5.1) и (5.2) при $Y=H^p(\mathscr{D}^k)$ показывает, что $A(\mathscr{D}^1)$ и $A(\mathscr{D}^k)$ неизоморфны.

Для доказательства леммы 2 вспомним *неравенство Гротендика — Питша* (4.3):

на окружности S^1 существует мера μ такая, что

$$\|Tf\|^p\leqslant\int_{S^1}|f(\xi)|^p\,d\mu,\quad \pi_p(\mu)=(\operatorname{Var}\mu)^{1/p}. \tag{5.3}$$

Оно сохранится, если μ заменить на $\mu+\alpha\lambda_0$, $\alpha>0$, λ_0 — мера Лебега на S^1, так что можно считать $\mu\gg\alpha\lambda_0$ и $\operatorname{Var}\mu<(1+\varepsilon)\pi_p(T)^p$. Тогда в силу (5.3) T продолжается по непрерывности до оператора $\widetilde{T}: H^p(\mu) \to Y$, где $H^p(\mu)$ равно замыканию многочленов по норме $\left(\int\limits_{S^1} |f(\xi)|^p\, d\mu\right)^{1/p}$.

По разложению Лебега $d\mu = d\sigma + a\,d\lambda_0$, где $a \in L^1(S^1)$, $a(\xi) \geqslant \alpha > 0$, а σ — сингулярна. Аппроксимационная теорема типа Бишопа — Рудина — Карлесона показывает [39], что $H^p(\mu) \simeq H^p(a\lambda_0) \dotplus H^p(d\sigma)$ и $H^p(d\sigma) = L^p(d\sigma)$. Рассмотрим, наконец, диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C(S^1) \arrow[r, "j_c"] & L^p(\mu) \arrow[r, "\sim"] & L^p(a\lambda_0) \dotplus L^p(\sigma) \arrow[d, "Q_a \dotplus 1"] \\
A(D^1) \arrow[u, "i_\infty"] \arrow[r, "j_h"] \arrow[dr, "T"'] & H^p(\mu) \arrow[u, "i_p"] \arrow[d, "\widetilde{T}"] & H^p(a\lambda_0) \dotplus H^p(\sigma) \arrow[l, "\sim"'] \\
& Y &
\end{tikzcd} \tag{5.4}$$

где Q_a — проектор из $L^p(S^1;\ a(\xi)\,d\lambda_0)$ на $H^p(S^1;\ a\,d\lambda_0)$, определяемый следующим образом.

Пусть $g(z)$ — голоморфная в $\mathscr{D}^1$ функция такая, что $u(z) = \operatorname{Re} g(z) =$ интеграл Пуассона от $\log a(\xi)$. Тогда $w(z) = \exp g(z) \neq 0$, $z \in \mathscr{D}^1$, и умножение на $w(z)^{1/p}$ осуществляет изометрический изоморфизм (!) $H^p(\alpha\lambda_0)$ на $H^p(\lambda_0)$. Более того, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
L^p(a\lambda_0) \arrow[r, "w^*(\xi)^{1/p}"] & L^p(\lambda_0) \\
H^p(a\lambda_0) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "w(z)^{1/p}"] & H^p(\lambda_0) \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd},$$

где вертикальные стрелки — изометрические вложения, а горизонтальные — изометрические изоморфизмы. Полагаем $Q_a \cdot = w(z)^{-1/p}(Q(w^*(\xi)^{1/p} \cdot))$. Тогда $\|Q_a\| = \|Q\| = B(p)$, и тем самым $T = \widetilde{T}(Q_a \dotplus 1) j_c i_\infty$ (см. диаграмму (5.4)), а так как T теперь пропущен через каноническое вложение $j_c: C(S^1) \to L^p(\mu)$, то неравенство (5.2) доказано.

Более аккуратным анализом [39] пространства $L_{as}(A, H)$ всех 1-абсолютно суммирующих операторов из $A(\mathscr{D}^1)$ и $A(G)$, где G — область голоморфности в C^k, $k > 1$, в гильбертово H показано, что эти банаховы пространства не изоморфны друг другу для широкого класса областей G, в частности, для $G=B_k=\{z\in C^k:\sum_1^k|z_j|^2<1\}$, единичному шару в C^k, $k>2$.

Мы надеемся, что дальнейший анализ геометрических свойств (p, q)-абсолютно суммирующих операторов поможет разобрать новые неизоморфные пары банаховых пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bessaga C.** A nuclear Fréchet space without basis. I; variation on a theme of Djakov and Mitiagin.— "Bull. Acad. polon. sci. Sér. math., astronom., phys.", 1976, v. 24, N 7, p. 471—473.
2. **Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.** Обобщенные функции. Т. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., Физматгиз, 1961. 472 с.
3. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., «Наука», 1965. 448 с.
4. **Grothendieck A.** Produits tensoriels topologiques.— "Mem. Amer. Math. Soc.", 1955, v. 16, 140 p.
5. **Djakov P.** A short proof of the theorem on quasi-equivalence of regular bases.— "Studia math.", 1975, v. 53, N 3, p. 269—271.
6. **Джаков П.** Несколько замечаний о ядерных пространствах фреше без базиса.— «Сердика», 1976, т. 2, № 2, с. 171—176.
7. **Djakov P. B., Mitiagin B. S.** Modified construction of a nuclear Fréchet space without basis.— In: Proceedings of the Seminar on random series, convex sets and geometry of Banach spaces. Aarhus, Aarhus Univ. Press, 1975, p. 26—49.
8. **Драгилев М. М.** Каноническая форма базиса пространства аналитических функций.— «Усп. мат. наук», 1960, т. 15, № 2, с. 181—188.
9. **Драгилев М. М.** Правильные базисы в ядерных пространствах.— «Мат. сб.», 1965, т. 68, с. 153—173.
10. **Dubinsky E.** Basis sequences in (s). Potsdam, N. Y., 1975, Preprint. 15 p.
11. **Dubinsky E.** Subspaces without bases in nuclear Fréchet spaces. Potsdam, N. Y., Clarkson College of Tech., 1975, Preprint. 22 p.
12. **Dynin A. S., Mitiagin B. S.** Criterion for nuclearity in terms of approximative dimension.— "Bull. Acad. polon. sci. Sér. math., astronom., phys.", 1960, v. 8, N 8, p. 535—540.
13. **Захарюта В. П.** Линейные топологические инварианты и изоморфизмы пространств аналитических функций.— В кн.: Математический анализ и его приложения. Т. 2. Ростов-на-Дону, РГУ, 1970, с. 3—13.
14. **Захарюта В. П.** Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизм пространств аналитических функций многих переменных.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 19. Харьков, «Вища школа», 1974, с. 133—157.

15. **Захарюта В. П.** Об изоморфизмах и квазиэквивалентности базисов в пространствах степенных рядов смешанного типа.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 221, № 4, с. 772—774.
16. **Зобин Н. М., Митягин Б. С.** Примеры ядерных метрических пространств без базиса.— «Функциональный анализ и его приложения», 1974, т. 8, № 4, с. 35—47.
17. **Зобин Н. М., Митягин Б. С.** Континуум попарно не изоморфных ядерных пространств Фреше без базиса.— «Сиб. мат. журн.», 1976, т. XVII, № 2, с. 249—258.
18. **Кондаков В. П.** О квазиэквивалентности правильных базисов в пространствах Кёте.— В кн.: Математический анализ и его приложения. Т. 5. Ростов-на-Дону, РГУ, 1974, с. 210—213.
19. **Crone L., Robinson W.** Every nuclear Frechet space with a regular basis has the quasi-equivalence property.— "Studia math.", 1975, v. 52, № 3, p. 203—207.
20. **Lassner G., Timmermann W.** Classification of domains of operator algebras. Препринт E2-8995, ОИЯИ. Дубна, 1975, с. 3—20.
21. **Митягин Б. С.** Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах.— «Усп. мат. наук», 1961, т. 16, № 4, с. 63—132.
22. **Mitiagin B. S.** Sur l'equivalence des basis inconditional dans les échelles de Hilbert.— "C. r. Acad. sci. Paris.", 1969, v. 269, p. 426—428.
23. **Mitiagin B. S.** Fréchet spaces with a unique inconditional basis.— "Studia math.", 1970, v. 38, p. 23—34.
24. **Митягин Б. С.** Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах.— "Studia math.", 1971, v. 37, p. 111—137.
25. **Mitiagin B. S., Zobin N. M.** Contre-exemple a l'existence d'une base dans un espace de Fréchet nucléare.— "C. r. Acad. sci. Paris", 1974, v. 279, p. 255—256 et 325—327.
26. **Митягин Б. С., Хенкин Г. М.** Линейные задачи комплексного анализа.— «Усп. мат. наук», 1971, т. 26, № 4, с. 93—152.
27. **Пич А.** Ядерные локально выпуклые пространства. М., «Мир», 1967. 266 с.
28. **Enflo P.** A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.— "Acta math.", 1973, v. 130, N 3—4, p. 309—317.
29. **Bennett G.** Some ideals of operators on Hilbert space.—"Studia math.", 1976, v. 55, № 1, p. 27—40.
30. **Bennett G., Goodman V., Newman C. M.** Norms of random matrices. Pacif. J., Math., 1975, v. 59, N 2, p. 359—365.
31. **Grothendieck A.** Résumé de la théorie metrique des produits tensoriels topologiques.—"Boletin Soc. Mat. Sao Paulo", 1956, v. 8, p. 1—79.
32. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962. 895 с.
33. **Kwapien S.** Some remarks on (p, q)-absolutely summing operators in l_p-spaces.— "Studia math.", 1968, v. 29, N 3, p. 327—337.
34. **Kwapien S.** On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators.—"Studia math.", 1970, v. 38, N 1—5, p. 193—201.
35. **Кисляков С. В.** Соболевские операторы вложения и неизоморфизмы некоторых банаховых пространств.— «Функциональный анализ и его приложения», 1975, т. 9, № 4, с. 22—27.
36. **Lindenstrauss J., Pelczynski A.** Absolutely summing operators in

$\mathscr{L}_p$-spaces and their applications.— "Studia math.", 1968, v. 29, N 3, p. 275—326.
37. **Митягин Б. С.** Об абсолютной сходимости рядов коэффициентов Фурье.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 157, № 5, с. 1047—1050.
38. **Mitiagin B. S., Pelszynski A.** Nuclear operators and approximative dimensions.— In: Proceedings of International Congress of Mathematics. M., "Мир", 1968, p. 366—372.
39. **Mitiagin B. S., Pelczynski A.** On the non-existence of linear isomorphisms between Banach spaces of analytic functions of one and several complex variables.— "Studia math.", 1975, v. 56, N 2, p. 175—186.
40. **Pelczynski A.** A characterization of Hilbert — Schmidt operators.— "Studia math.", 1967, v. 28, N 3, p. 355—360.
41. **Pelczynski A.** p-integral operators commuting with group representations and examples of quasi-p-integral operators which are not p-integral.— "Studia math.", 1969, v. 33, N 1, p. 63—70.
42. **Persson A., Pietsch A.** p-nucleare und p-integrale operatoren in Banach raumen.— "Studia math.", 1969, v. 33, N 1, p. 19—62.
43. **Pietsch A.** Theorie der Operatorenidealen. Jena, Friedrich — Schiller — Univ., 1972. 260 p.
44. **Стейн И.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., «Мир», 1973. 342 с.
45. **Судаков В. Н.** Об одном классе компактов гильбертова пространства.— «Усп. мат. наук», 1963, т. 18, № 1, с. 181—187.
46. **Хенкин Г. М.** Отсутствие равномерного гомеоморфизма между пространствами гладких функций от одного и от n переменных ($n \geqslant 2$).— «Матем. сб.», 1967, т. 74, № 4, с. 595—607.
47. **Хенкин Г. М.** Неизоморфность некоторых пространств функций от разного числа переменных.— «Функциональный анализ и его приложения», 1967, т. 1, № 4, с. 57—68.
48. **Mitiagin B.** A nuclear Fréchet space without basis. The case of strongly finite dimentional decomposition. — "Bull. Acad. Polon. Sci.", 1976, v. 24, N 7, p. 474—478.

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА-СИНТЕЗА. I

Н. К. Никольский

Проблема спектрального анализа-синтеза принадлежит к числу тех задач, которые возбуждают интерес математиков задолго до своей точной постановки. Среди классических разделов математики она стимулировала, например, развитие линейной алгебры (основная теорема алгебры и теория Жордана) и основ анализа Фурье. Здесь я буду придерживаться следующей формулировки задачи анализа-синтеза, принадлежащей Л. Шварцу [1] и охватывающей почти все аспекты этой проблематики в рамках линейного анализа. Пусть X — линейное топологическое пространство, $\mathscr{T}$ — некоторая совокупность линейных операторов из X в X, обладающая полным в X набором $K\mathscr{T}$ собственных и корневых векторов (общих для операторов семейства $\mathscr{T}$). Следующие вопросы составляют содержание задачи анализа-синтеза.

(А) Содержит ли каждое инвариантное относительно $\mathscr{T}$ ($\equiv$ инвариантное относительно каждого оператора из $\mathscr{T}$) подпространство хотя бы один собственный вектор („анализ")?

(Б) Порождается ли каждое такое подпространство собственными и корневыми векторами семейства $\mathscr{T}$, содержащимися в нем („синтез")?

Эта статья содержит изложение первой части доклада, прочитанного во Всесоюзной школе по теории операторов (Новосибирск, 1975) и посвященного обзору следующих двух реализаций задачи анализа-синтеза.

I. Спектральный синтез операторов в абстрактных пространствах Банаха и Гильберта.

II. Функциональный аспект: анализ-синтез идеалов в пространствах аналитических функций.

В связи с этими вопросами затрагивается также

III. Дифференциально-разностная интерпретация проблемы анализа-синтеза.

Проблема гармонического синтеза на локально компактных группах не рассматривается вообще.

Список литературы содержит лишь явно упоминаемые работы, связанные с проблемой анализа-синтеза. В качестве источников дальнейших библиографических сведений можно указать на книги и обзоры [2—6].

Условимся в терминологии и некоторых обозначениях. Все пространства предполагаются сепарабельными, если из контекста явно не следует обратное; подпространство — это замкнутое линейное подмножество, оператор — непрерывное линейное преобразование. Если оператор T допускает спектральный синтез, то будем писать $T \in \mathrm{Sint}$; аналогичный смысл имеет запись $T \in \mathrm{Anal}$. Множество (структура) всех T-инвариантных подпространств обозначается символом $\mathrm{Lat}\, T$; $\sigma(T)$ — это спектр оператора T, $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ — его резольвента, $\sigma_p(T) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\lambda \in \sigma(T) : \mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$ — точечный спектр, $|T|$ — норма оператора T. Символы $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{N}$ имеют обычный смысл, $\boldsymbol{T} = \{\lambda \in \boldsymbol{C} : |\lambda| = 1\}$, $\mathrm{R}_+ = \{t \in \boldsymbol{R} : t \geqslant 0\}$, $\boldsymbol{Z}_+ = \boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{R}_+$; $V(\ldots)$ — замкнутая линейная оболочка множества $(\ldots)$ в том пространстве, о котором идет речь.

§ 1. Первые результаты о синтезе: операторы, близкие к унитарным, и почти-периодический анализ

Первый вклад в „абстрактную“ проблему анализа-синтеза (не считая теории Жордана, см. § 2) внесен С. Бохнером и Дж. фон Нейманом [7]. Пусть X — банахово пространство (или даже пространство Фреше), $\mathcal{T}$ — коммутативная группа линейных операторов в X с относительно компактными траекториями, т. е. такая, что множество $\mathcal{T}x \overset{\mathrm{def}}{=} \{Tx : T \in \mathcal{T}\}$ относительно компактно в X при любом $x \in X$. Используя теорему Петера—Вейля, Бохнер и фон Нейман доказали, что $K_{\mathcal{T}}$ полно в X и группа $\mathcal{T}$ допускает спектральный синтез. В дальнейшем было замечено, что, предполагая заранее полноту $K_{\mathcal{T}}$, в этой теореме слово „группа“ можно заменить словом

„полугруппа“ и от компактных траекторий перейти к слабокомпактным (в случае рефлексивного пространства X). При этом однопараметрические полугруппы $\{T_t\}$, $t\in\boldsymbol{R}_+$ или $t\in\boldsymbol{Z}_+$, могут быть включены в группу операторов $\mathcal{T}$, обладающую тем же свойством компактности. На такие группы в полном объеме переносится теория почти-периодических функций, что гарантирует не только синтезируемость $\mathcal{T}$, но и суммируемость формального ряда Фурье $x\sim\sum\limits_{\lambda\in\sigma_p(\mathcal{T})}(x,f_\lambda)\,x_\lambda$ методом Бохнера — Чезаро (см. [8—12], а также [2, § 6.2]); здесь x_λ, f_λ — собственные векторы соответственно $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^*$, отвечающие собственному числу λ, $|\lambda|=1$; $\sigma_p(\mathcal{T})$ — множество всех таких чисел.

Основной вывод распространяется на обратимые операторы T, удовлетворяющие вместе со своим обратным условию „A-эргодичности“, т. е. такие, что

$$|R(\lambda,T)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{||\lambda|-1|},\quad \lambda\in\boldsymbol{C}\diagdown\boldsymbol{T}. \tag{1}$$

Точнее, требование A-эргодичности (1) приводит к возможности синтеза вместе с некоторым налагаемым на спектр топологическим условием, неизбежность которого хорошо иллюстрируется теорией гармонического анализа-синтеза в пространствах функций, сопряженных с локальными алгебрами на группах. Это условие — отсутствие совершенных подмножеств в спектре $\sigma(T)$,— соединенное с (1), приводит к полноте семейства собственных подпространств оператора T, а так как все названные ограничения являются наследственными при переходе к сужениям на инвариантные подпространства, то отсюда следует и синтезируемость такого оператора T. Сформулируем этот вывод в виде следующей теоремы и докажем утверждение о полноте.

Теорема [11]. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, T — оператор в X, удовлетворяющий условию* (1). *Если спектр $\sigma(T)$ не более чем счетен, то множество K_T полно в X и, следовательно, $T\in\mathrm{Sint}$.*

Доказательство. Если $\lambda\in\boldsymbol{T}$, то по эргодической теореме [13] $\operatorname{Ker}(\lambda I-T)\dotplus\overline{(T-\lambda I)X}=X$ (прямая сумма). Кроме того, каждая изолированная точка спектра $\sigma(T)$ является (простым) полюсом резольвенты $R(\lambda,T)$ (по условию (1) и элементарной теореме Г. Полиа, см., например, [13]). Пусть R — ортогональное дополнение в X^* подпространства $V(K_T)$. Проверим, что $\sigma(T^*|R)=\varnothing$. Действительно, по условию теоремы спектр $\sigma(T^*|R)$ не более чем счетен, но и не содержит изолированных точек (собственных чисел, в силу вышесказанного), так как из $T^*f=\lambda f$, $f\in R$, следует, что $f((T-\lambda I)X)=0$ и $f(\operatorname{Ker}(T-\lambda I))=0$, т. е. $f=0$.

Этот результат содержится в [11, 6]. О невозможности замены условия (1) более слабым несколько слов сказано в § 4. Отметим здесь лишь следующий элементарный пример. Пусть $\alpha_k>0$, $\alpha_k\uparrow\infty$ $(k\to\infty)$ и пусть X — пространство всех функций $x=\{x_k\}_{K\in\boldsymbol{Z}}$ на $\boldsymbol{Z}$ („двусторонних последовательностей"), для которых $x_k=0(\alpha_{|k|})$, $|k|\to\infty$. Оператор T — сдвиг вправо: $T\{x_k\}_{k\in Z}=\{x_{k-1}\}_{k\in Z}$. Собственные векторы сдвига — геометрические прогрессии $\{\lambda^k\}_{k\in Z}$, $\lambda\in\boldsymbol{T}$, — полны в X, но подпространство $X_+=\{x\in\in X: x_i=0,\ i<0\}$, инвариантное относительно T, не содержит ни одного из них. Таким образом, $T\notin\mathrm{Anal}$, хотя произведение $(1-|\lambda|)\,|R(\lambda, T)|$ растет вблизи окружности $\boldsymbol{T}$ сколь угодно медленно. В случае гильбертова пространства (или „гладкого" банахова) соответствующие примеры более сложны, так как множество $\sigma_p(T)\cap\boldsymbol{T}$ не может быть слишком массивным, если нормы $|T^n|$, $n\geqslant 0$, медленно растут (см. [6]).

Подробный анализ обобщений теоремы Бохнера — фон Неймана, а также другие результаты, связанные с синтезом операторов, „близких" к унитарным, можно найти в работах [2, 6].

§ 2. Вполне непрерывные и более общие операторы

Для конечномерных операторов проблема спектрального анализа-синтеза получила свое решение еще в пределах линейной алгебры. Каждый такой оператор T (T действует в X, $\dim TX<+\infty$) разлагает пространство X в сумму корневых подпространств $X=E_{\lambda_1}+\ldots+E_{\lambda_n}$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}=\sigma(T)$ (теорема Жордана), а поскольку класс конечномерных операторов замкнут относительно сужений и факторизаций, то $T\in\mathrm{Sint}$.

Ближайший бесконечномерный аналог этого класса — класс $\mathfrak{S}_\infty$ всех вполне непрерывных операторов — оказался, однако, весьма сложным для спектрального анализа-синтеза, так что для его представителей эту проблему нельзя считать решенной и по сей день. Впервые бесконечномерная специфика задачи анализа-синтеза была открыта Г. Гамбургером [14], который с помощью достаточно сложных и запутанных построений указал пример полного оператора T (т. е. оператора с полным множеством K_T), $T\in\mathfrak{S}_\infty$, сужения которого не наследуют свойство полноты; среди таких сужений имеются даже вольтерровы операторы. Тем более оператор Гамбургера не допускает спектрального синтеза. Простые конструкции такого рода операторов приводятся в § 3, 4.

В то же время наследственность свойства полноты, если эта последняя обусловлена ограничениями „аналитического" характера, накладываемыми на резольвенту, сингулярные числа, числовую область (и т. п.) оператора T, является, по-видимому, общим принципом, многочисленные проявления которого обнаружены в работе [15]. Здесь доказано, что все основные признаки полноты семейства корневых векторов приводят на самом деле к возможности спектрального анализа-синтеза. В основном речь идет о так называемых „слабых возмущениях" полных вполне непрерывных операторов, изучавшихся В. Б. Лидским, М. В. Келдышем, В. И. Мацаевым, И. Ц. Гохбергом — М. Г. Крейном, А. С. Маркусом (см. [16]). Для вполне непрерывных и несколько более общих классов операторов задача сводится к изучению специальных „спектральных" подпространств, являющихся аналогами хорошо известных объектов гармонического анализа в L^1-алгебрах (см., например, [3]).

Пусть T — линейный оператор в банаховом пространстве X, который а) обладает полным множеством одномерных (собственных) корненых подпространств E_λ, $\lambda\in\in\sigma_p(T)$; б) не имеет собственных чисел, являющихся неизолированными точками спектра $\sigma(T)$, и таков, что $\sigma_p(T)$ лежит в неограниченной компоненте (открытого) множества $\sigma_p(T)\cup(C\setminus\sigma(T))$.

Пусть далее $\mathscr{E}_\lambda$ — спектральный проектор Рисса на подпространство E_λ ($\lambda\in\sigma_p$), σ — произвольное подмножество точечного спектра $\sigma_p(T)$. Положим

$$X_\sigma=V(E_\lambda:\lambda\in\sigma),\quad X^\sigma=\bigcap_{\lambda\notin\sigma}\operatorname{Ker}\mathscr{E}_\lambda. \qquad (2)$$

Ясно, что $X_\sigma \subset X^\sigma$; оба эти подпространства инвариантны относительно оператора T; X^σ является „спектральным" в любом разумном смысле этого слова (см. [2]), а X_σ — ортогональное дополнение аналогичного подпространства $(X^*)^{\sigma_p \setminus \sigma}$. Будем называть оператор T спектрально (или наследственно) полным [1], если для всякого σ

$$X_\sigma = X^\sigma. \tag{3}$$

Теорема [15]. *Предположим, что оператор T удовлетворяет условиям* а) *и* б)*. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) $T \in \mathrm{Sint}$;

2) *T наследственно полон.*

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2), так как в подпространстве X^σ нет других собственных векторов оператора T, кроме векторов из E_λ, $\lambda \in \sigma$. 2)$\Rightarrow$1), так как если E — инвариантное относительно T подпространство, то $\mathscr{E}_\lambda E \subset E$ (условие б)) и, следовательно, $X_\sigma \subset E \subset X^\sigma$, где $\sigma = \{\lambda : \mathscr{E}_\lambda E \neq \{0\},\ \lambda \in \sigma_p(T)\}$; отсюда $E = X_\sigma$.

Отметим для сравнения что, как легко видеть, возможность „анализа" для операторов исследуемого типа равносильна тотальности семейства $\{\mathscr{E}_\lambda : \lambda \in \sigma_p\} : \mathscr{E}_\lambda x = 0$, $\forall \lambda \in \sigma_p \Rightarrow x = 0$, причем одна из импликаций (анализ $\Rightarrow$ тотальность) справедлива вообще для любого полного оператора с минимальным семейством корневых векторов. Кстати, и в самой теореме Маркуса условие а) использовано не очень существенно, в то время как условие типа б) просто необходимо; последнее обстоятельство делается очевидным после нижеследующих замечаний и примеров § 5.

Основной особенностью только что доказанной теоремы нужно считать осуществляемый ею перевод „оперативного" условия 1) на геометрический язык: спектральная полнота оператора T связывается, по существу, не с самим оператором T, а с семейством его корневых подпространств. Вообще, если задано некоторое семейство подпространств $\{E_\lambda : \lambda \in \Sigma\}$ топологически свободное (минимальное) в том смысле, что оператор проектирования $\mathscr{E}_\lambda \left(\mathscr{E}_\lambda \middle| E_\lambda \overset{\text{def}}{=} I;\ \mathscr{E}_\lambda \middle| E_\mu \overset{\text{def}}{=} 0,\quad \mu \neq \lambda \right)$ непрерывен на $V\left(E_\lambda : \lambda \in \Sigma\right)$ при всех

[1] В [15] это свойство называется «усиленной полнотой».

λ, то можно определить подпространства X_σ, X^σ равенствами (2), а наследственную полноту семейства — требованием (3). Стоит также заметить, что любой конечно-строчный перманентный метод суммирования формальных рядов Фурье $x \sim \sum_\lambda \mathscr{E}_\lambda x$, $x \in X$, приводит к наследственной полноте. Более того, свойство наследственной полноты при $\dim E_\lambda \equiv 1$ допускает следующую „локальную" запись в терминах этого разложения Фурье: $x \in V\left(\mathscr{E}_\lambda x : \lambda \in \Sigma\right)$, $\forall x \in X$.

Этими сведениями (даже по модулю следующих § 3, 4) не исчерпывается известная информация по проблеме анализа-синтеза для операторов, подчиненных условиям типа а) — б); подробности (например, зависимость свойства Sint от геометрических особенностей точечного спектра) можно найти в [2, 6, 15].

§ 3. Как избежать наследственной полноты

В § 2 отмечено, что многие семейства векторов, встречающиеся в анализе, обладают свойством наследственной полноты — это и базисы суммирования (относительно какого-нибудь метода), и, стало быть, семейства, близкие к базисам, и семейства собственных или корневых векторов полных операторов, если эта полнота обеспечивается некоторым „аналитическим" условием. Нетривиальным является вопрос о самом существовании полных, но не наследственно полных семейств в заданном сепарабельном пространстве Банаха. Ответ на этот вопрос положителен (Маркус, Гурарий; см. [15]), и хотя приводимый ниже пример вполне элементарен, он оставляет неясным, насколько часто встречаются ненаследственно полные семейства, в каких пределах меняются их свойства и в какой мере эти свойства могут быть предписаны заранее. Вместе с упомянутым примером А. С. Маркуса ниже обсуждается один возможный способ построения ненаследственно полных семейств, реализация которого позволила бы внести ясность, в поставленные вопросы.

Сначала следует выделить один сравнительно тривиальный случай ненаследственной полноты — это полные минимальные семейства $\{x_n : n \in N\}$ с не тотальным биортогональным семейством $\{f_n : n \in N\}$. Пользуясь обозначениями предыдущего параграфа и полагая $\mathscr{E}_n = (\cdot, f_n)x_n$, $n \in N$, получим в этом случае $X_\varnothing = \{0\}$, но $X^\varnothing \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : (x, f_n) = 0,\ \forall n \in N\} \neq \{0\}$, что и приводит к ненаследованию полноты. Примеры семейств такого типа строятся довольно легко; один из возможных методов указан в § 4.

Существенно сложнее совместить ненаследственную полноту с тотальностью биортогонального семейства (т. е. на операторном языке § 2,— с возможностью спектрального анализа). В этом направлении известен, по существу, лишь один пример [15][2]; его изложение удобно начать со следующей элементарной леммы.

Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство $\{\mathscr{E}_\lambda : \lambda \in \Sigma\}$ — топологически свободное семейство проекторов в H. Для того чтобы оно было наследственно полным в H необходимо и достаточно, чтобы*

$$\bigvee\left(\mathscr{E}_\lambda H,\ \mathscr{E}^*_\mu H : \lambda \in \sigma,\ \mu \in \Sigma \setminus \sigma\right) = H;\quad \forall \sigma,\ \sigma \subset \Sigma. \tag{4}$$

Доказательство. По определению $H^\sigma = \bigcap_{\mu \notin \sigma} \operatorname{Ker} \mathscr{E}_\mu$, откуда $(H^\sigma)^\perp \overset{\text{def}}{=} H \ominus H^\sigma = \bigvee\left(\mathscr{E}^*_\mu H : \mu \notin \sigma\right)$. Требуемый результат вытекает теперь из определения наследственной полноты ($H^\sigma \ominus H_\sigma = \{0\}$, $\forall \sigma$) и равенств

$$(H^\sigma \ominus H_\sigma)^\perp = H_\sigma \oplus (H^\sigma)^\perp = \bigvee\left(\mathscr{E}_\lambda H : \lambda \in \sigma\right) \oplus \bigvee\left(\mathscr{E}^*_\mu H : \mu \notin \sigma\right).$$

Пример А. С. Маркуса. Пусть $(e_n : n \geqslant 0\}$ — ортонормированный базис в H. Положим при $n \geqslant 1$

$$x_{2n-1} = e_{2n-1},\quad x_{2n} = e_{2n} + \alpha_{n0}e_0 + \sum_{k \geqslant 1} \alpha_{nk}e_{2k-1},$$

$$f_{2n} = e_{2n},\quad f_{2n-1} = e_{2n-1} + \alpha_{n0}e_0 + \sum_{k \geqslant 1} \alpha_{nk}e_{2k},$$

где

$$\alpha_{n0} = 1/\sqrt{n},\ n \geqslant 1;\ \alpha_{nk} = 1/nk \text{ при } 1 \leqslant n < k,\ \alpha_{nk} = -1/2n$$
$$\text{при } n = k,\ \alpha_{nk} = -1/nk - 1/\sqrt{nk} \text{ при } n > k.$$

---

[2] В самое последнее время это положение изменилось. В работе Л. Н. Довбыш и Н. К. Никольского «Два способа избежать наследственной полноты» (Зап. научн. семин. ЛОМИ. Т. 64. Л., «Наука», 1976) указаны простые приемы построения ненаследственно полных семейств; в частности, один из них следует схеме, излагаемой ниже, после Примера А. С. Маркуса.

Биортогональность семейств $\{x_m : m \in N\}$ и $\{f_m : m \in N\}$ непосредственно очевидна. Проверим, что эти семейства ненаследственно полны в H. Так как изоморфизм $e_0 \to e_0$, $e_{2n} \to e_{2n-1}$, $e_{2n-1} \to e_{2n}$ $(n \geqslant 1)$ переводит f_m в x_m, то можно ограничиться рассмотрением одного семейства $\{x_m : m \in N\}$. Полнота: $g = \sum_{n \geqslant 0} \hat{g}(n) e_n$, $g \perp x_m, \forall\, m \geqslant 1 \Rightarrow \hat{g}(2n-1) = 0$, $n \geqslant 1$, $\hat{g}(2n) + \hat{g}(0) \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $n \geqslant 1 \Rightarrow \hat{g}(0) = 0 \Rightarrow \hat{g}(2n) = 0$, $n \geqslant 1 \Rightarrow g = \mathbf{0}$. Отсутствие наследственной полноты вытекает из леммы, если положить $\mathscr{E}_m = (\cdot, f_m) x_m$, $\sigma = \{2n-1; n \in N\}$, ибо тогда

$$\bigvee \left(\mathscr{E}_m H, \mathscr{E}_k^* H : m \in \sigma, k \notin \sigma\right) = \bigvee (x_{2n-1}, f_{2n} : n \geqslant 1) = \\ = \bigvee (e_n : n \geqslant 1) \neq H. \qquad (5)$$

В работе [15] также показано, что любое минимальное ненаследственное полное семейство можно трансформировать так, что оно станет равномерно минимальным $(\sup_{m \geqslant 1} |\mathscr{E}_m| < +\infty)$ с сохранением прочих свойств (полноты, которая не наследуется; тотальности биортогонального семейства).

Можно предполагать, что изложенный пример включается в следующую общую схему построения интересующих нас семейств: выбирается ортонормированное семейство $\{e_n : n \in N\}$ в гильбертовом пространстве H, затем подбирается (можно считать — положительный) оператор R так, что образ $\{Re_n : n \in N\}$ обладает (в своей замкнутой линейной оболочке) всеми требуемыми свойствами. По-видимому, нужного искажения свойств базиса $\{e_n : n \in N\}$ можно достигнуть, регулируя „угол“ между разложениями единицы, которые порождают оператор R и базис $\{e_n : n \in N\}$. Принципиальная возможность изготовления на этой основе целого класса примеров, подобных примеру А. С. Маркуса, вытекает из следующей леммы, неявно содержащейся в [65] и подробно изложенной в диссертации Никольской Л. Н. [66].

Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство, R — взаимно однозначный, но необратимый $(0 \in \sigma(R))$ оператор в H, $\{x_n : n \geqslant 1\}$ — произвольное линейно независимое семейство векторов в H. Тогда существуют числа $\{t_n\}_{n \geqslant 1}$, ортонормированное семейство $\{e_n : n \geqslant 1\}$, изоморфное* *вложение V подпространства $V(e_n:n\geqslant 1)$ в H и унитарное отображение U такие, что*

$$URVe_n=x_n,\ n\geqslant 1. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\{b_i\}_{i\geqslant 1}$ — базис в $V(x_n:n\geqslant\geqslant 1)$, полученный ортогонализацией семейства $\{x_n:n\geqslant 1\}$. Тогда

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}x_{n,i}b_i,\qquad x_{n,n}\neq 0,\quad n\geqslant 1.$$

Наличие полярного разложения для оператора R позволяет считать, что $R\geqslant 0$ (унитарная часть может быть впоследствии включена в U). Пользуясь спектральным разложением для R, выберем ортонормированное семейство $\{c_i:i\geqslant\geqslant 1\}$, для которого

$$\lim_{i}\|Rc_i\|=0,\ (Rc_i,\ Rc_k)=0 \text{ при } i\neq k.$$

Выберем затем индуктивно подсемейство $\{e_{i_n}:n\geqslant 1\}$ так, чтобы

$$\frac{\|Rc_{i_{n+1}}\|^2}{|x_{n+1,n+1}|^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_{n+1,k}|^2}{\|Rc_{i_k}\|^2}<\frac{1}{2^{n+2}},\qquad n\geqslant 1,$$

и положим

$$g_n=\frac{\|Rc_{i_n}\|}{x_{n,n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{n,k}}{\|Rc_{i_k}\|}c_{i_k},\qquad n\geqslant 1.$$

Тогда

$$\|g_n-c_{i_n}\|^2=\left\|\frac{\|Rc_{i_n}\|}{x_{n,n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_{n,k}}{\|Rc_{i_k}\|}c_{i_k}\right\|<\frac{1}{2^{n+1}},\qquad n\geqslant 1.$$

и поэтому $\sum_{n\geqslant 1}\|g_n-c_{i_n}\|^2<1/2$. Отсюда по теореме Винера — Бари [16] следует, что семейство $\{g_n:n\geqslant 1\}$ подобно ортонормированному семейству $\{c_{i_n}\}\overset{\text{def}}{=}\{e_n\}$. Остальное следует из равенств

$$Rg_n=\frac{\|Re_n\|}{x_{n,n}}\sum_{k=1}^{n}x_{n,k}\frac{Re_k}{\|Re_k\|},\qquad n\geqslant 1,$$

и унитарной эквивалентности семейств $\left\{\frac{Re_k}{\|Re_k\|} : k \geqslant 1\right\}$ и $\{b_k : k \geqslant 1\}$.

По поводу этих построений см. также задачу 11, § 8.

§ 4. Полные расширения

Итак, сужения полных вполне непрерывных операторов на инвариантные подпространства не только не обязаны быть полными, но могут вообще не иметь собственных векторов, как это видно из упоминавшихся выше примеров Г. Гамбургера. Обладают ли эти части (т. е. сужения) какими-либо специфическими свойствами, обусловленными полнотой исходного оператора? Ответ отрицателен — частью полного вполне непрерывного оператора может быть любой наперед заданный компактный оператор [17]. Точнее, если X — банахово (гильбертово) пространство и T_0 — вполне непрерывный оператор в $X (T_0 \in \mathfrak{S}_\infty)$, то X можно дополняемым образом вложить в банахово (гильбертово) пространство Y и указать там полный оператор T, для которого $TX \subset X$, $T | X = T_0$ и $T \in \mathfrak{S}_\infty$. Таким образом, полные операторы из $\mathfrak{S}_\infty$ не являются, вообще говоря, „правильными" аналогами конечномерных отображений, их свойства не обязаны восстанавливаться по одноименным свойствам конечномерных сужений. В проблеме синтеза речь идет о восстановлении инвариантных подпространств.[3]

Схема построения полного расширения для оператора T_0 (который будем считать циклическим и вольтерровым для простоты) состоит в следующем. Положим $Y = H \oplus X$, где H — гильбертово пространство, $\dim H = \infty$, выберем ортонормированный базис $\{e_n\}_{n \geqslant 1}$ в H и зададим оператор T диаграммой

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, "\Lambda"'] \arrow[drr, "\Gamma"] & \oplus & X \arrow[d, "T_0"] \\ H & \oplus & X \end{tikzcd},$$

где $\Lambda e_n = \lambda_n e_n$, $n \geqslant 1$ $(\lambda_n \neq 0,\ \lim \lambda_n = 0)$. Тогда собственные векторы T имеют вид $e_n \oplus f_n$, $f_n \in X$, а собственные

[3] О восстановлении спектра оператора см. [18, 6].

числа суть λ_n, $n\geqslant 1$. Пусть g — циклический (воспроизводящий) вектор оператора T_0. Будем считать Γ одномерным оператором, $\Gamma H=\{\lambda g:\lambda\in\mathbf{C}\}$. Тогда необходимо $f_n=\gamma_n R(\lambda_n, T_0)g$, $\gamma_n\in\mathbf{C}$. Условие непрерывности Γ состоит в сходимости ряда $\sum\limits_{n\geqslant 1}|\gamma_n|^2$, а условие полноты оператора T сводится к импликации

$$\sum_{n\geqslant 1}|\langle f_n, h\rangle|^2<+\infty\Rightarrow h=0\ (h\in X^*),$$

т. е. к следующей „теореме единственности“:

$$\sum_{n\geqslant 1}|\gamma_n|^2|\varphi(1/\lambda_n)|^2<+\infty\Rightarrow\varphi\equiv 0,$$

где $\varphi(\zeta)=\langle R(1/\zeta, T_0)g, h\rangle$. Остается доказать существование нужных последовательностей $\{\gamma_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$. Точнее, можно проверить [17, 6], что какова бы ни была растущая функция W положительного аргумента, существуют комплексные числа γ_n и ζ_n, такие, что $\sum\limits_{n\geqslant 1}|\gamma_n|^2<\infty$, $\lim\limits_n|\zeta_n|=\infty$ и для любой целой функции φ

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(\zeta)=O(W(|\zeta|)),\\ \sum\limits_{n\geqslant 1}|\gamma_n|^2|\varphi(\zeta_n)|^2<\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi\equiv 0. \tag{7}$$

Отметим, что такого рода теоремы единственности стали популярными в последние годы в связи с теорией аппроксимации „с дополнительными ограничениями“ и в связи с задачами об одновременной аппроксимации [6, 19, 20].

Приведенная схема доказательства не позволяет сразу утверждать, что расширение T принадлежит тому же подклассу класса $\mathfrak{S}_\infty$, что и оператор T_0. Однако она позволяет надеяться, что это на самом деле так, по крайней мере, пока речь идет о классах Шаттена — Неймана $\mathfrak{S}_p$. Действительно, по известной теореме Келдыша—Мацаева [16] для вольтеррова оператора T_0 из класса $\mathfrak{S}_p$ имеет место оценка

$$\int_1^\infty\frac{\log M(r)}{r^{p+1}}\,dr<+\infty,\quad M(r)=\max_{|\lambda|=r}|R(1/\lambda, T_0)|;$$

таким образом, чтобы гарантировать включение $T\in\mathfrak{S}_p$, остается доказать существование последовательности

$\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ из (7) со свойством $\sum\limits_{n\geqslant 1}|\zeta_n|^{-p}<+\infty$, считая в (7) $W(r)=M(r)$. Такого рода теоремы единственности для целых функций порядка p представляют, по-видимому, и самостоятельный интерес.

Использование той же техники полных расширений может быть полезным и в других ситуациях. Так, в [6, 21] описанный выше метод расширения привлекается для доказательства неулучшаемости теорем о синтезе из § 1. Например, любой порядок роста резольвенты вблизи окружности $\mathbf{T}$, больший единицы, совместим с наличием у оператора „сколь угодно плохих" частей; аналогичное заключение можно сделать и для так называемых C-эргодических операторов $\left(\sup\limits_{n\geqslant 0,\lambda\in\mathbf{T}}\left|\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda^kT^k\right|<+\infty\right)$ с полным семейством собственных векторов, отвечающих унитарному точечному спектру (т. е. множеству $\sigma_p(T)\cap\cap\mathbf{T}$). Полные расширения можно пытаться использовать также в известной задаче о подобии сжатию полиномиально ограниченного оператора в гильбертовом пространстве.

§ 5. Синтез нормальных операторов

Обратимся теперь к чисто „гильбертовской" теории, т. е. к классам операторов, выделяемым с помощью инволюции $T\to T^*$. Самосопряженные операторы допускают синтез ввиду спектральной теоремы: если $T=T^*$ и $\mathscr{E}_T$ — соответствующая спектральная мера, то $\mathscr{E}_T(\Delta)\in\in\mathscr{R}(T)$, каково бы ни было борелевское множество Δ ($\mathscr{R}(T)$ — слабо замкнутая алгебра, порожденная полиномами от оператора T); следовательно, $\operatorname{Lat}T\subset\operatorname{Lat}\mathscr{E}_T(\Delta)$ для всех Δ. Для полного оператора T это приводит к возможности спектрального синтеза, так как в этом случае $x=\sum\limits_{\lambda\in\sigma_p(T)}\mathscr{E}_T(\{\lambda\})x$ для любого x.

Унитарные операторы исследуются уже не столь очевидным образом, но результат остается тем же — они синтезируемы. Это вытекает как из теорем § 1, так и из нижеследующих рассуждений о нормальных операторах.

Нетривиальность проблемы анализ-синтеза для нормальных операторов была обнаружена Дж. Бремом и П. Халмошем в начале 50-х годов при первых попытках изучения „тонкой структуры“ операторов этого класса [22, 23]. В течение двадцати лет эта задача интенсивно изучалась многими авторами и, наконец, в 1972 г. Д. Сарасоном [24] был получен критерий возможности синтеза в терминах точечного спектра, который позволяет ответить на многие (но как мы увидим, не на все) вопросы, сопутствующие проблеме синтеза. Начнем со следующего предложения Дж. Вермера.

Теорема [25]. *Пусть T — нормальный оператор с полным множеством собственных векторов. Следующие утверждения равносильны*: 1) $T\in\mathrm{Sint}$; 2) $T\in\mathrm{Anal}$; 3) $\mathrm{Lat}\,T\subset\mathrm{Lat}\,T^*$; 4) *множество $\sigma_p(T)$ не несет ненулевой меры, ортогональной многочленам.*

Последнее утверждение означает, что любая борелевская конечная мера μ, сосредоточенная на $\sigma_p(T)$ (т. е. $\mu\,|\,(C\setminus\sigma_p)=0$) и ортогональная множеству $\mathscr{P}_A$ всех многочленов от комплексного переменного z (т. е. $\int z^n d\mu=0$, $\forall n\geqslant 0$), исчезает ($\mu=0$). Если модифицировать первое условие на меру μ, потребовав абсолютной непрерывности μ относительно $\mathscr{E}_T$, то в этой новой редакции утверждения 3) и 4) эквивалентны для любого нормального оператора.

Кроме того, Д. Сарасон [26] и Р. Гудмен [27] доказали, что 3) равносильно включению $T^*\in\mathscr{R}(T)$.

Доказательство теоремы. Утверждения 1) и 3) связаны так же, как для самосопряженных операторов, поэтому в доказательстве нуждается лишь цепочка 2)$\Rightarrow$4)$\Rightarrow$3).

2) $\Rightarrow$ 4). Пусть e_λ — (какой-нибудь) нормированный вектор из собственного подпространства $\mathscr{E}(\{\lambda\})H$, $\lambda\in\in\sigma_p(T)$; пусть μ — мера на $\sigma_p(T)$, ортогональная многочленам, $\mu\neq 0$. Не умаляя общности, считаем, что $\mu(\{\lambda\})\neq\neq 0$ для всех $\lambda\in\sigma_p(T)$, так как иначе можно перейти к части оператора на спектральном подпространстве $\mathscr{E}(\Delta)H$, $\Delta=\{\lambda:\mu(\{\lambda\})\neq 0\}$. Пусть $\mu(\{\lambda\})=a_\lambda\bar b_\lambda$ и $\sum\limits_\lambda |a_\lambda|^2<\infty$, $\sum\limits_\lambda |b_\lambda|^2<\infty$. Положим $x=\sum\limits_\lambda a_\lambda e_\lambda$, $y=\sum\limits_\lambda b_\lambda e_\lambda$. Тогда $(T^n x, y)=0$, $n\geqslant 0$, но ни один собственный вектор оператора T не содержится в подпространстве $V(T^n x:n\geqslant$

$\geqslant 0$) ввиду того, что $b_\lambda \neq 0$ для всех λ. Итак, $T \notin \mathrm{Anal}$.

4) $\Rightarrow$ 3). Если $E \in \mathrm{Lat}\, T$ и $x \in E$, $y \in E^\perp$, то $(T^n x, y) = 0$, $n \geqslant 0$, т. е. $\int z^n d(\mathscr{E}_T x, y) = 0$, $n \geqslant 0$. Отсюда $(\mathscr{E}_T(\Delta)x, y) = 0$ для всех Δ. Из произвольности y теперь следует, что $\mathscr{E}_T(\Delta)x \in E$, и стало быть $E \in \mathrm{Lat}\, \mathscr{E}_T(\Delta)$ для всех Δ. Так как $T^* = \int \bar{z} d\mathscr{E}_T$, то $E \in \mathrm{Lat}\, T^*$.

Таким образом, исследование синтезируемости нормального оператора сводится к частному случаю известной и важной в теории функций задачи об описании мер, подчиненных заданной мере и ортогональным многочленам. Прежде чем сформулировать упомянутый выше критерий Сарасона, убедимся в существовании нетривиальных атомических мер, ортогональных $\mathscr{P}_A$. Воспользуемся элегантной (и исторически первой) конструкцией Ж. Вольфа [28].

Пусть $D = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ — круг комплексной плоскости и $\{d_i : i \geqslant 1\}$ — семейство непересекающихся кружков, исчерпывающее D в том смысле, что $m_2\left(D \setminus \bigcup_i d_i\right) = 0$, m_2 — плоская мера Лебега. Если λ_i — центр ($\lambda_i \neq 0$), а r_i — радиус круга d_i, то при $|\zeta| > 1$

$$-\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_D (\lambda - \zeta)^{-1} dm_2(\lambda) = \sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{\pi}\int_{d_i} (\lambda - \zeta)^{-1} dm_2(\lambda) = \sum_{i \geqslant 1} r_i^2 (\lambda_i - \zeta)^{-1}$$

и, приравнивая коэффициенты Лорана,

$$\sum_{i \geqslant 1} r_i^2 = 1; \quad \sum_{i \geqslant 1} r_i^2 \lambda_i^k = 0, \quad k \geqslant 1.$$

Следовательно, множество $\{0\} \cup \{\lambda_i : i \geqslant 1\}$ несет нетривиальную меру ($\mu(\{\lambda_i\}) = r_i^2$, $i \geqslant 1$; $\mu(\{0\}) = -1$), ортогональную многочленам.

Существуют и другие, значительно более „редкие" подмножества круга D (например, сгущающиеся только к окружности T), обладающие тем же свойством. Многие из них были открыты задолго до появления следующей замечательной теоремы Д. Сарасона, но могут быть без труда получены с ее помощью.

Теорема [24]. *Пусть T — полный нормальный оператор. Следующие утверждения равносильны*: 1) $T \notin \mathrm{Sint}$;

2) *существует ограниченная область* G, $G\subset C$, *такая, что для любой ограниченной и аналитической в* G *функции* f

$$\sup_{\zeta\in G}|f(\zeta)|=\sup_{\zeta\in G\cap\sigma_p(T)}|f(\zeta)|. \qquad (8)$$

Однако чтобы получить из этого критерия характеристику синтезируемых операторов (спектров) в наглядно-геометрических терминах, приходится затратить немало труда. Ниже приводится доказательство облегченного варианта теоремы Сарасона, найденного ранее в [29, 30].

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mu\neq 0$ — мера, ортогональная многочленам и сосредоточенная на $\sigma_p(T)$, существование которой гарантируется теоремой Вермера. Будем считать, что множество $s=\{\lambda:\mu(\{\lambda\})\neq 0\}$ состоит из изолированных точек и сгущается только к границе своей полиноминально-выпуклой оболочки G (как это, например, происходит в разбираемом ниже интересном случае $\sigma_p(T)=\{\lambda_i:i\geqslant 1\}$, $\lambda_i\in D$, $\lim\limits_i|\lambda_i|=1$).

При сделанных предположениях выберем точку $\lambda_0\in s$ и рассмотрим банахову алгебру H — замыкание в норме $|f|\overset{\text{def}}{=}\sup\{|f(\zeta)|:\zeta\in s'\}$, $s'=s\setminus\{\lambda_0\}$, алгебры $H^\infty(G)$ всех регулярных и ограниченных в G функций. Пусть z — тождественное отображение G в себя. Пусть далее $\sigma(z)$ — спектр элемента z в алгебре H, $G'=G\setminus s'$ и $\sigma=G'\cap\sigma(z)$. Множество σ замкнуто в G'. Множество $G'\setminus\sigma$ также замкнуто в G', ибо если $\lambda_n\in G'\setminus\sigma$, $\lambda=\lim\limits_n\lambda_n\in G'$, то можно считать, что точки λ_n равномерно отделены от (относительно замкнутого) множества s', так что $(z-\lambda)^{-1}=$ $=(H)\text{-}\lim\limits_n(z-\lambda_n)^{-1}$ и $\lambda\notin\sigma(z)$. Чтобы убедиться в совпадении σ и G', достаточно проверить, что $\lambda_0\in\sigma$. Но так как $\mu(\{\lambda_0\})\neq 0$, то $p(\lambda_0)=\sum\limits_{\lambda\in s'}a_\lambda p(\lambda)$ для всех $p\in\mathcal{P}_A$, где $\sum\limits_\lambda|a_\lambda|<+\infty$. Поскольку любая регулярная и ограниченная в G функция есть ограниченный поточечный предел полиномов, то та же формула для $p(\lambda_0)$ справедлива и для всех таких функций p. Следовательно, $p\xrightarrow{\varphi}p(\lambda_0)$ — непрерывный мультипликативный функционал в H и $\varphi(z-$ $-\lambda^0 1)=0$. Отсюда $\lambda_0\in\sigma$, $\sigma\neq\varnothing$ и потому $\sigma=G'$.

С другой стороны, если $|f|<\sup\{|f(\zeta)|:\zeta\in G\}$ хотя бы для одной функции из $H^\infty(G)$, то можно считать, что

$|f|=1$, но в некоторой точке $a\in G'$, $|f(a)|>1$. Тогда

$$(H)\text{-}\lim_n (1-[f(a)]^{-n}f^n)=1$$

и значит существует предел $(H)\text{-}\lim\limits_n \dfrac{1-[f(a)]^{-n}f^n}{z-a\cdot 1}$, равный $(z-a1)^{-1}$. Противоречие.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\lambda_0\in s\overset{\text{def}}{=}G\cap\sigma_p(T)$, $s'=s\setminus\{\lambda_0\}$. Положим $Jf=\{f(\lambda):\lambda\in s'\}$, $f\in H^\infty(G)$, и рассмотрим функционал φ на $JH^\infty(G)$, определенный равенством $\varphi c=$ $=(J^{-1}c)(\lambda_0)$, $c\in JH^\infty(G)$. Отметим теперь, что подпространства $JH^\infty(G)$ и $\varphi^{-1}(0)$ замкнуты в слабой топологии $\sigma(l^\infty(s'),\ l^1(s'))$. Проверим, например, замкнутость гиперплоскости $\varphi^{-1}(0)$. По известной теореме Банаха достаточно убедиться в секвенциальной замкнутости $\varphi^{-1}(0)$. Но если $\varphi(c_n)=0$, $c_n\xrightarrow{\sigma}c$, то $c\in JH^\infty(G)$, а последовательность $\{J^{-1}c_n\}_{n\geqslant1}$ ограничена в $H^\infty(G)$ (используется равенство (8)). Теперь можно считать, что $\{J^{-1}c_n\}_{n\geqslant1}$ поточечно сходится в G к функции f и потому $Jf=c$. Так как $(J^{-1}c_n)(\lambda_0)\to f(\lambda_0)$, то $\varphi(c)=0$ и $c\in\varphi^{-1}(0)$. По основной теореме теории двойственности отсюда следует, что φ — σ-непрерывный функционал и, следовательно, существует элемент $a\in l^1(s')$, для которого

$$f(\lambda_0)=\sum_{\lambda\in s'}a_\lambda f(\lambda),\quad f\in H^\infty(G).$$

Мера $\mu:\mu(\{\lambda_0\})=-1$; $\mu(\{\lambda_0\})=a_\lambda$, $\lambda\in s'$, нетривиальна, сосредоточена на $s=G\cap\sigma_p(T)$ и ортогональна многочленам.

Отметим некоторые интересные детали, связанные с теоремой Сарасона и с „определяющими подмножествами" заданной области G (т. е. такими, которые обладают аналогичным (8) свойством сохранения sup-нормы на $H^\infty(G)$). Прежде всего можно заметить, что приведенное доказательство включения 1)$\Rightarrow$2) с незначительными изменениями сохраняется и при более общих условиях [4]; например, это так, если множество s содержит хотя бы одну изолированную точку и содержится в некоторой одно-

[4] В этой связи полезно также отметить, что любое определяющее подмножество s области G содержит часть $s'\subset s$, которая снова является определяющей для G и сгущается только к границе ∂G [30].

связной области G, которую не разбивает множество $\bar{s}\cap G$. Далее, если вспомнить, что возможность синтеза равносильна включению $T^*\in\mathcal{R}(T)$, то несложное рассуждение приведет к эквивалентности утверждений 1)—2) теоремы Сарасона и слабой $\sigma(L^\infty(\nu), L^1(\nu))$-неполноты многочленов $\mathcal{P}_A$ в пространстве $L^\infty(\nu)$, какова бы ни была мера ν, взаимно абсолютно непрерывная со спектральной мерой $\mathcal{E}_T$. Полная формулировка теоремы Сарасона как раз и дает описание слабого замыкания $\mathcal{P}_A$ в $L^\infty(\nu)$.

Следующий элементарный частный случай укладывается, конечно, в теорему Сарасона, но может быть совсем просто доказан независимо. Сопоставим каждому множеству $s\subset \boldsymbol{C}$ подмножество $\pi(s)$ всех его точек пика ($t\in\pi(s)$ в том и только в том случае, когда $t\in s$ и существует функция f, являющаяся равномерным на s пределом многочленов, для которой $f(t)=1$, $|f(x)|<1$, $\forall x\in s\setminus\{t\}$). Проверим, что нормальный оператор T синтезируем, если

$$\sigma_p(T)=\pi(\sigma_p)\cup\pi(\sigma_p\setminus\pi(\sigma_p))\cup\ldots \qquad (9)$$

Действительно, если μ — мера, сосредоточенная на σ_p и ортогональная $\mathcal{P}_A$, и если $t\in\pi(\sigma_p)$, то

$$\int\limits_s f^n d\mu=0,\quad n\geqslant 1,$$

где f — функция, упомянутая в определении точки пика. Переходя к пределу под знаком интеграла, получим $\mu(\{t\})=0$. Следовательно, мера μ сосредоточена на $\sigma_p\setminus\pi(\sigma_p)$. С помощью индукции отсюда следует, что $\mu=0$

Равенство (9) выполнено, например, для унитарных операторов, для операторов со спектром на $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} T_{r_n}$, $T_r\overset{\text{def}}{=}\{\zeta\in\boldsymbol{C}:|\zeta|=r\}$; $r_n\downarrow$.

И в заключение приведем простой конкретный пример определяющего подмножества единичного круга $\boldsymbol{D}$. Пусть $0<r<1$. Если $f\in H^\infty$ и ζ, $\zeta'\in T_r$, то

$$|f(\zeta)-f(\zeta')|\leqslant\|f\|_\infty\frac{|\zeta-\zeta'|}{1-r}.$$

Выберем теперь последовательность $\{r_n\}_{n\geqslant 1}$, $r_n\uparrow 1$, и каждую окружность T_{r_n} разобьем равноудаленными точками (множество этих точек e_n) с шагом ε_n, $\varepsilon_n = o(1-r_n)$ при $n \to \infty$. Положим $s = \bigcup_{n \geqslant} e_n$. Тогда

$$\sup_{T_{r_n}} |f| \leqslant \sup_{e_n} |f| + \|f\|_\infty \frac{\varepsilon_n}{1-r_n} \leqslant \sup_s |f| + \|f\|_\infty \frac{\varepsilon_n}{1-r_n},$$

так что $\|f\|_\infty = \lim_n \sup_{T_{r_n}} |f| \leqslant \sup_s |f|$ для любой функции $f \in H^\infty$. Поскольку всегда $\sup_s |f| \leqslant \|f\|_\infty$, то s — определяющее множество.

Эта процедура построения s дает ощутимое представление о минимальной степени массивности определяющего множества вблизи границы $\boldsymbol{T}$ круга $\boldsymbol{D}$. С другой стороны, нетрудно показать [31], что подмножество s круга $\boldsymbol{D}$ является определяющим в том и только в том случае, когда почти все точки окружности $\boldsymbol{T}$ суть угловые пределы последовательностей из s. Тривиальная часть этого утверждения (достаточность) следует из теоремы Фату (функция f из H^∞ имеет почти всюду на $\boldsymbol{T}$ угловой предел и порождаемая этими граничными значениями функция $f_{\boldsymbol{T}}$ задает изометрическое вложение $f \to f_{\boldsymbol{T}}$ пространства H^∞ в $L^\infty(\boldsymbol{T})$. Это еще раз доказывает (без использования оценки производной $|f'(\zeta)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{1-|\zeta|}$), что построенное выше множество $s = \bigcup_{n \geqslant 1} e_n$ является определяющим, причем даже в том случае, когда $\varepsilon_n = O(1-r_n)$. Последнее условие гарантирует, что каждая точка окружности $\boldsymbol{T}$ есть угловой предел точек из s.

Теоремы Вермера и Сарасона не решают, однако, всех задач, связанных с синтезом нормальных операторов. Некоторые из таких задач перечислены в § 8.

§ 6. Сжатия и диссипативные операторы

Важные классы операторов в гильбертовом пространстве выделяются требованиями знакоопределенности уклонений (дефектных операторов) от самосопряженности или унитарности. Таковы классы диссипативных $\left(A_I \overset{\text{def}}{=} \frac{A-A^*}{2i} \geqslant 0\right)$ и сжимающих операторов $\left(D_T^2 \overset{\text{def}}{=} I - T^*T \geqslant 0\right)$. Их теория развивается во многом как теория возмущений —

„малость“ уклонения гарантирует близость свойств таких операторов к свойствам, вытекающим из спектральной теоремы. Известно совсем немногое о синтезе операторов этих классов, и это немногое основано на изучении класса C_0 [32][5]. Ниже приводится набросок теории класса C_0 в той мере, в какой это связано с проблемой анализа-синтеза.

Нашей ближайшей целью будет построение максимального функционального исчисления, но начать следует с доказательства существования „унитарной дилатации“ для произвольного сжатия T. Под этим понимается унитарный оператор U, действующий в пространстве $\mathscr{H}$, более широком, чем исходное пространство H, и такой что $T^n = PU^n | H$, $n \geqslant 0$ (P — ортопроектор из $\mathscr{H}$ на H). Простейшим является изометрическое расширение Жюлиа V, действующее в пространстве $\mathscr{H}^1 = l^2(H) \overset{\mathrm{def}}{=} \Big\{ x = \{x_i\}_{i \geqslant 0} :$

$$x_i \in H, \qquad \sum_{i \geqslant 0} \| x_i \|^2 < \infty \Big\} : Vx \overset{\mathrm{def}}{=} (Tx_0, D_T x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

При этом H вкладывается в $l^2(H)$ отображением $x \to (x, 0, \ldots)$. Тогда $PV^n | H = T^n$, $n \geqslant 0$, и $\|Vx\| = \|x\|$, $\forall x \in l^2(H)$. Если V не унитарный (а только изометрический) оператор, то нужно воспользоваться легко доказываемым разложением Вольда для V:

$$\mathscr{H}^1 = \mathscr{H}^1_u \oplus (E \oplus VE \oplus V^2 E \oplus \ldots),$$

где $E = \mathscr{H}^1 \ominus V\mathscr{H}^1$, $\mathscr{H}^1_u = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} V^n \mathscr{H}^1$. Ясно, что сужение $V | \mathscr{H}^1_u$ унитарно, а оператор $V | \left(\mathscr{H}^1 \ominus \mathscr{H}^1_u \right)$ эквивалентен правому сдвигу в $l^2(E)$ и тем самым имеет тривиальную дилатацию $\mathscr{S}$ в пространстве $l^2_Z(E)$ „двусторонних“ последовательностей:

$$\mathscr{S}(\ldots, x_{-1}; x_0, x_1, \ldots) = (\ldots, x_{-2}; x_{-1}, x_0, \ldots)$$

Если нам нужна „минимальная“ дилатация оператора T, можно положить $U = \mathscr{S} | \mathscr{H}$, где $\mathscr{H}$ — наименьшее надпространство H, приводящее $\mathscr{S}$.

[5] Основные результаты этого параграфа принадлежат Б. Секефальви-Надю и Ч. Фойашу [32]. Однако оранжировка материала является новой. Историю вопроса можной найти также в [2].

Наличие унитарной дилатации немедленно влечет неравенство Дж. фон Неймана для сжатия T:

$$|f(T)\leqslant|Pf(U)|\leqslant|f(U)|\leqslant\|f\|_\infty,\ f\in\mathcal{P}_A.$$

Лемма. *Если T — сжатие в гильбертовом пространстве H, то $T=T_u\oplus T_0$, где T_u — унитарный оператор, а T_0 не содержит унитарных частей (вполне неунитарный).*

Доказательство. Так как равенства $\|Tx\|=\|x\|$ и $(I-T^*T)x=0$ равносильны, то множество

$$H_u=\{x\in H:\|T^nx\|=\|x\|=\|T^{*n}x\|,\ \forall n\geqslant 1\}$$

линейно, инвариантно относительно операторов T и T^* и сужение $T_u\overset{\text{def}}{=}T\,|\,H_u$ унитарно. Из определения подпространства H_u следует, что оператор $T_0\overset{\text{def}}{=}T\,|\,H_0$, где $H_0=H\ominus H_u$, вполне неунитарен.

Это разложение мало помогает, однако, в изучении T-инвариантных подпространств, если не сделать каких-либо дополнительных предположений об операторе T. В задаче о спектральном синтезе таким предположением является полнота (корневых подпространств) оператора T. При этом ясно, что собственные векторы, отвечающие числам из $\sigma_p(T)\cap\mathbb{T}$, лежат в H_u, остальные корневые подпространства — в $H_0=H\ominus H_u$. Следовательно, T_u и T_0 — полные операторы.

Лемма [15, 11]. *Если $E\in\operatorname{Lat}T$, то $E=E_u\oplus E_0$, $E_u\subset H_u$, $E_0\subset H_0$.*

Доказательство следует из того, что ортогональный проектор P_u на подпространство H_u есть сильный предел последовательности многочленов от оператора T (действительно, тогда $x=x_u\oplus x_0\in E\Rightarrow x_u\in E$, и потому $E=(E\cap H_u)\oplus(E\cap H_0)$). Нужная последовательность многочленов $\{p_k\}_{k\geqslant1}$ строится так. Пусть σ_k, $k\geqslant1$ — последовательность конечных множеств, исчерпывающая $\sigma_p(T)\cap\mathbb{T}$. Положим $p_k=\sum\limits_{\lambda\in\sigma_k}\left(\frac{1+\bar\lambda z}{2}\right)^{N_k}$. Если числа N_k достаточно велики, то а) $\lim p_k(\zeta)=\zeta$, $\forall\zeta\in\sigma_p(T)$; б) $\|p_k\|_\infty\leqslant2$, $\forall k$; в) $\lim p_k=0$ равномерно на любом компактном подмножестве круга $\mathbb{D}$.

Из этих свойств немедленно следует, что $\lim\limits_k p_k(T)x=x_u$ для любого вектора x, являющегося суммой корневых. Поскольку $|p_k(T)|\leqslant 2$, то это верно и для всех $x\in H$.

Отметим, что возможность синтеза для унитарного оператора T_u вытекает как из результатов § 1, так и из результатов § 5. Обратимся к вполне неунитарным сжатиям T. Можно проверить, что минимальная унитарная дилатация U такого сжатия имеет абсолютно непрерывный спектр [32]. Это позволяет распространить исчисление $f(T)\overset{\text{def}}{=}Pf(U)|H$ с множества $\mathscr{P}_A$ на все пространство H^∞. Если при этом $f_n\in H^\infty$, $\sup\{\|f_n\|_\infty : n\geqslant 1\}<\infty$ и $\lim\limits_n f_n=0$ п. в. на $\boldsymbol{T}$ (короче, если $f_n\xrightarrow{(*)}f$), то

$$\lim_n\|f_n(T)x\|\leqslant\lim_n\|f_n(U)(x)\|=0,\ \forall x\in H.$$

Теперь можно определить класс C_0: это множество всех вполне неунитарных сжатий T, для которых существуют функции $f\in H^\infty$, $f\neq 0$ с $f(T)=0$.

Лемма. *Если $T\in C_0$, то существует внутренняя (в смысле А. Берлинга) функция m_T такая, что $f\in H^\infty$, $f(T)=0\Rightarrow f/m_T\in H^\infty$.*

Доказательство использует один специальный факт теории z-инвариантных подпространств. Рассмотрим множество $\{f\in H^\infty : f(T)=0\}$. Оно линейно, $(*)$-замкнуто в H^∞ и инвариантно относительно умножения на функцию z. Следовательно [32, 33, 6], это подпространство имеет вид $m\cdot H^\infty$, где $m=m_T$ — внутренняя функция.

Роль функции m_T (называемой „минимальным аннулятором“) в теории класса C_0 подобна роли минимального многочлена в теории матриц, а ее изучение аналогично хорошо известным рассуждениям линейной алгебры. Введем следующие обозначения: если $\lambda\in\boldsymbol{D}$, то $b_\lambda\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\lambda-z}{1-\bar\lambda z}\cdot\dfrac{|\lambda|}{\lambda}$; если λ — нуль функции $m\in H^\infty$ кратности k, то $m=b_\lambda^k\cdot m_\lambda$, где $m_\lambda(\lambda)\neq 0$, $m_\lambda\in H^\infty$; $m^*(z)=\overline{m(\bar z)}$; $E_\lambda=E_\lambda^T\overset{\text{def}}{=}\bigcup\limits_{n\geqslant 0}\operatorname{Ker}(T-\lambda I)^n$ — корневой линеал оператора T. Перечислим свойства минимального аннулятора, необходимые для решения задачи о синтезе [6].

[6] К сказанному ниже нужно прибавить совсем немногое, чтобы получить, например, что $\sigma_p(T)=\sigma(T)\cap\boldsymbol{D}=\{\lambda : m_T(\lambda)=0\}$ и что, таким образом, каждое собственное число оператора T — изолированная точка спектра, что корневые подпространства $\{E_\lambda : \lambda\in\sigma_p\}$ образуют минимальное семейство и т. д.

(а) Если $m = m_T$ и $m = b_\lambda^k \cdot m_\lambda$, $m_\lambda(\lambda) \neq 0$, то $b_\lambda^k(T) E_\lambda = \{0\}$.

Действительно, пусть $x \in E_\lambda$; тогда $(T - \lambda I)^n x = 0$ при некотором $n \geqslant 0$, и потому T-инвариантное подпространство $L \overset{\text{def}}{=} V(T^i x : i \geqslant 0)$ конечномерно. Так как $\sigma(T|L) \subset \{\lambda\}$, $m_\lambda(T)|L = m_\lambda(T|L)$ и $m_\lambda(\lambda) \neq 0$, то оператор $m_\lambda(T)$ взаимно однозначен на L, т. е. $m(T)x = m_\lambda(T) b_\lambda^k(T) x = 0$ влечет $b_\lambda^k(T) x = 0$.

(б) $m_\lambda(T) H \subset \operatorname{Ker} b_\lambda^k(T) = E_\lambda$.

Действительно, $b_\lambda^k(T) m_\lambda(T) = m(T) = 0$, а включение $\operatorname{Ker} b_\lambda^k(T) \subset E_\lambda$ очевидно.

(в) Если $T \in C_0$, то $T^* \in C_0$ и $m_{T^*} = m_T^*$.

Теорема. *Оператор $T \in C_0$ является полным (т. е. $V(E_\lambda : \lambda \in \boldsymbol{D}) = H$) в том и только в том случае, когда m_T есть произведение Бляшке* $\left(m_T = \prod\limits_\lambda b_\lambda^{k(\lambda)}\right)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $B = \prod\limits_{\lambda \in \sigma_p(T)} b_\lambda^{k(\lambda)}$; в силу (*а*), $B(T) = 0$, и поскольку B делит m_T (в алгебре H^∞), то $B = m_T$.

Достаточность. Пусть $E = V(E_\lambda : \lambda \in \sigma_p(T))$; тогда $TE \subset E$ и $T^* E^\perp \subset E^\perp$; если положить $A \overset{\text{def}}{=} P_{E^\perp} T | E^\perp = (T^* | E^\perp)^*$, то ясно, что $A \in C_0$. Проверим, что $m_A = 1$, и тогда $E^\perp = \{0\}$, т. е. $E = H$. Для этого достаточно заметить, что функция m_A делит m_λ $\forall \lambda$, т. е. $m_\lambda(A) x = 0$, $\forall x \in E^\perp$. Из свойств (в) и (б) следует, что

$$m_\lambda(A) x = P_{E^\perp} m_\lambda(T) x \in P_{E^\perp} \operatorname{Ker} b_\lambda^k(T) \subset P_{E^\perp} E = \{0\}.$$

Теорема. *Если $T \in C_0$ и T — полный оператор, то* $T \in \operatorname{Sint}$.

Доказательство. Пусть $E \in \operatorname{Lat} T$. Тогда $m_T(T|E) = m_T(T)|E = 0$, так что $m_{T|E}$ делит m_T. Поскольку m_T — произведение Бляшке, то и $m_{T|E}$ — тоже.

Следствие. *Если T — полное сжатие, $\sigma_p(T) \not\supset \boldsymbol{D}$ и $I - T^*T$ — ядерный оператор ($I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$), то* $T \in \operatorname{Sint}$.

Доказательство. Достаточно считать, что T — вполне неунитарное сжатие (так как $TE \subset E \Rightarrow E = E_u \oplus E_0$, $T_u E_u \subset E_u$, $T_0 E_0 \subset E_0$, и для полного унитарного оператора T_u спектральный синтез возможен, см. § 5). Будем, кроме того, предполагать, что $0 \notin \sigma_p(T)$; это не умаляет общности, ибо если $\lambda \in \boldsymbol{D} \setminus \sigma_p(T)$, то операторы T и $T' \stackrel{\text{def}}{=} b_\lambda(T)$ имеют одинаковые инвариантные подпространства и $0 \notin \sigma_p(T')$.

Пусть $E \in \operatorname{Lat} T$, $\dim E < \infty$. Тогда $\det(P_E T^* T P_E + P_{E\perp}) \geqslant \det T^* T > 0$, так как оператор T взаимно однозначен. Левая часть этого неравенства совпадает с $|\det(T|E)|^2$, т. е. с $\prod_{\lambda \in \sigma_p} |\lambda|^{\dim E \cap E_\lambda}$. Так как подпространство E произвольно, то $\prod_{\lambda \in \sigma_p} |\lambda|^{\dim E_\lambda} > 0$, и, стало быть, произведение $B = \prod_\lambda b_\lambda^{\dim E_\lambda}$ сходится. Ясно, что $B(T) = 0$, и $T \in C_0$. По теореме $T \in \operatorname{Sint}$.

Отметим теперь, что ни одну из посылок этого следствия нельзя заменить более слабой без того, чтобы не потерять его заключения.

Пример 1. Пусть $T = S^*$ — оператор левого сдвига в пространстве Харди H^2 ($Sf = zf$, $S^* f = \frac{f - f(0)1}{z}$, $f \in H^2$). Оператор S^* полон, $I - S^*S$ — одномерный проектор, но спектральный синтез (и даже анализ) для S^* невозможен (например, подпространство $E = H^2 \ominus \left[\exp\frac{z+1}{z-1} H^2\right]$ инвариантно относительно S^*, но не содержит ни одной собственной функции, каковыми являются дроби $(1 - \lambda z)^{-1}$, $\lambda \in \boldsymbol{D}$).

Пример 2 [34]. Пусть $\mathfrak{S}$ — симметрично-нормированный (с.-н.) идеал операторов в пространстве H, $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}_1$. Тогда существует полный нормальный оператор T, не допускающий синтеза, и такой, что $I - T^*T \in \mathfrak{S}$. Построим такой оператор. Известно [16], что идеал $\mathfrak{S}$ определяется некоторой нормирующей функцией Φ (не умаляя общности, можно думать о сепарабельном с.-н. идеале), причем

$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{n}{\Phi(1_1, 1_2, \ldots, 1_n, 0, \ldots)} = +\infty.$$

Пусть n_k — такие номера, что $\sum_{k \geqslant 1} \frac{\Phi(1_1, \ldots, 1_{n_k}, 0, \ldots)}{n_k} < \infty$.

Пусть далее $r_k = 1 - n_k^{-1}$ и e_k — конечный набор точек на окружности $T_{r_k} = \{\zeta : |\zeta| = r_k\}$, разбивающий ее на n_k равных дуг. Если T — нормальный оператор, соответствующий спектру $\sigma = \bigcup_{k\geqslant 1} e_k$, то $T \notin \mathrm{Sint}$ (см. § 5). Дефектный оператор $I - T^*T$ содержится в $\mathfrak{S}$:

$$\Phi(\underbrace{1-r_1^2, \ldots, 1-r_1^2}_{n_1}, \ldots, \underbrace{1-r_k^2, \ldots, 1-r_k^2}_{n_k}, \ldots) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \Phi(\underbrace{1-r_k^2, \ldots, 1-r_k^2}_{n_k}, 0, 0, \ldots) < +\infty.$$

Из полученных результатов вытекает также теорема М. С. Бродского [35] о синтезе.

Следствие [35]. *Если A — полный диссипативный оператор и $A_J \in \mathfrak{S}_1$, то $A \in \mathrm{Sint}$.*

Доказательство получается из предыдущего следствия, если сделать преобразование Кэли $A \to T \overset{\mathrm{def}}{=} (A - iI)(A + iI)^{-1}$. Нужно только заметить, что $1 \notin \sigma(T)$ (и потому $\sigma_p(T) \not\supset \boldsymbol{D}$) и $\mathrm{Lat}\, A = \mathrm{Lat}\, T$ (так как $T = I + 2iR(A, -i)$, $A = 2iR(T, 1) - iI$ и резольвентные множества $\boldsymbol{C} \setminus \sigma(A)$ и $\boldsymbol{C} \setminus \sigma(T)$ связны).

Существует интересный пример к теореме Бродского, найденный в [36]. Пусть μ — чисто точечная (атомическая) неотрицательная конечная мера на отрезке $[0, 1]$ и

$$(Af)(x) \overset{\mathrm{def}}{=} 2i \int_{[0,x]} f d\mu, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad f \in L^2(\mu).$$

Тогда A — полный оператор, $A_J \geqslant 0$, $A_J \in \mathfrak{S}_1$ и, стало быть, $A \in \mathrm{Sint}$.

Попытки обращения теоремы Бродского, аналогичные примеру 2, наталкиваются на „геометрические“ трудности. Здесь и на самом деле ситуация, по-видимому, является иной: представляется вероятным, что заключение этой теоремы сохраняется и для диссипативных операторов с $A_J \in \mathfrak{S}_p$ $(p < \infty)$, а может быть и с $A_J \in \mathfrak{S}_\infty$. В аналогичной гипотезе для сжатий должны рассматриваться лишь операторы, чей спектр не содержит целиком окружность $\boldsymbol{T}$.

Интересен и важен вопрос об описании синтезируемых сжатий на языке характеристической функции θ_T [32]. Перед тем, однако, придется отыскать критерий полноты семейства корневых подпространств (хотя бы при условии мероморфности резольвенты в круге D) в терминах θ_T. В случае, когда дефектные операторы $I-T^*T$ и $I-TT^*$ конечномерны, такой критерий известен [32, 37] и состоит в требовании, чтобы определитель $\det\theta_T$ был произведением Бляшке (тогда и θ_T — произведение Бляшке — Потапова [38, 39]). Разумеется, и в общем случае полнота T должна означать, что θ_T — „произведение Бляшке", но трудность состоит в том, чтобы придать разумный, аналитически проверяемый смысл последнему термину. Если это будет сделано, то проблема синтеза сведется к тому, чтобы проверять тривиальный в случае $\dim(I-T^*T)=\dim(I-TT^*)=1$ факт: делитель произведения Бляшке есть снова функция того же вида.

§ 7. Спектр равен нулю. Проблема одноклеточности

Во всех разобранных выше случаях ведущую роль играют простота спектра ($\dim E_\lambda=1$) или его геометрические особенности. Что же происходит, когда такие характеристики утрачиваются? Крайний и потому немаловажный в общей теории случай — полный оператор с нулевым спектром. Здесь известно удручающе мало. Как и в конечномерном пространстве, синтез для оператора A возможен, если $A^n=0$ при некотором n (общее, если $p(A)=0$, $p\not\equiv 0$ — полином). Далеко не столь проста задача о синтезируемости для общих „дифференциальных" операторов в смысле Гельфонда — Леонтьева, иначе — для операторов взвешенного сдвига. Их определение состоит в следующем. Пусть $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$ — базис в пространстве X (можно считать, что $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$ — лишь минимальная последовательность с тотальной биортогональной $\{e_n^*\}_{n\geqslant 0}$) и $\lambda_n\in\boldsymbol{C}$, $n\geqslant 0$. Тогда оператор $T_\Lambda\left(\sum\limits_{n\geqslant 0}a_ne_n\right)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{n+1}\lambda_ne_n$ есть (левый) сдвиг с весовой последовательностью $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$. В большинстве публикаций о сдвиге с нулевым спектром роль X играет l^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$ [7], но в последнее

[7] В задаче о синтезе есть смысл рассматривать только полные операторы; поэтому всюду в этом параграфе символ l^∞ означает либо пространство всех ограниченных последовательностей, снабженное слабой $\sigma(l^\infty, l^1)$-топологией, либо пространство всех последовательностей, стремящихся к нулю.

время изучаются и более общие пространства (см. подробнее [2]). Условие $\sigma(T_\Lambda)=\{0\}$ близко к требованию $\lim\limits_n \lambda_n=0$ или хотя бы $\varliminf\limits_k \lambda_{n_k}=0$ по достаточно „густой" подпоследовательности $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$. Результаты работ [40, 6] показывают, что возможность синтеза для такого сдвига в пространствах l^p (и некоторых других) зависит от „правильности" изменения модулей $|\lambda_n|$ (типа монотонности на арифметических подпрогрессиях).

Прежде чем переходить к подробностям, отметим простую переформулировку задачи анализа-синтеза для оператора T_Λ, $\sigma(T_\Lambda)=\{0\}$, проясняющую ее „геометрический смысл". Поскольку $\sigma(T_\Lambda)=\{0\}$ и $\operatorname{Ker} T_\Lambda=V(e_0)$, то $T_\Lambda\in\operatorname{Anal} \Leftrightarrow (E\in\operatorname{Lat} T_\Lambda,\ E\neq\{0\}\Rightarrow e_0\in E)$. Из равенства $\operatorname{Ker} T_\Lambda^n=V(e_0,\ldots,e_{n-1})$, $n\in \boldsymbol{N}$, следует, что синтезируемость нетривиального подпространства E, $E\in\operatorname{Lat} T_\Lambda$, имеет место только тогда, когда $E=X_n$, $X_n\overset{\text{def}}{=}(e_0,\ldots,e_{n-1})$ при некотором $n\in\boldsymbol{N}$. Таким образом, возможность спектрального синтеза для оператора T_Λ равносильна равенству $\operatorname{Lat} T_\Lambda=\{X_n: n\geqslant 0\}\cup\{X\}$. Чтобы сформулировать это свойство на другом языке, заметим, что решетка подпространств $\{X_n: n\geqslant 0\}\cup\{X\}$ линейно упорядочена (относительно теоретико-множественного включения). Операторы T с линейно упорядоченной решеткой $\operatorname{Lat} T$ называются одноклеточными [41, 39, 38, 2]. В случае $\dim X<+\infty$ — это операторы, имеющие одну клетку Жордана в каноническом представлении. В случае произвольного гильбертова пространства X существует обширная теория, аналогичная теории Жордана, которая стремится разложить заданный оператор в «сумму» одноклеточных, и для многих важных классов операторов ей удается это сделать [38, 39, 32, 2]. Несмотря на то, что в этой теории одноклеточные операторы играют фундаментальную роль, их собственное возможное строение изучено явно недостаточно. По существу, известно лишь два типа таких операторов: операторы T_Λ и их сопряженные (с решеткой инвариантных подпространств, изоморфной $\boldsymbol{N}$) и вольтерровы операторы вида $f\xrightarrow{V}\int\limits_0^x k(t,x)f(t)\,dt$, $0\leqslant x\leqslant 1$ (при известных ограничениях на ядро k решетка $\operatorname{Lat} V$ изоморфна отрезку $[0, 1]$).

В последующей части этого параграфа приводится беглый обзор идей, используемых для доказательства синтезируемости (одноклеточности) операторов взвешенного сдвига. Двойственные задачи для правого сдвига T^*_Λ таковы: следует ли из $T^*_\Lambda E \subset E$, $E \neq X^*$, что $E \subset X_1^\perp$; следует ли из $T^*_\Lambda E \in E$, $E \neq \{0\}$, что $E = V\left(e^*_k : k \geqslant n\right)$ при некотором n, $0 \leqslant n < +\infty$? Следующее предложение — фактически первый признак одноклеточности операторов T_Λ, если не считать примеров М. Г. Хапланова [42] ($X = A(\{0\})$ — пространство всех функций, регулярных в точке 0, $\lambda_n \equiv 1$) и В. Донохью [43] ($X = l^2$, $\lambda_n = 2^{-n}$).

Теорема [44][8]. *Пусть X — банахово пространство, $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$ — полная минимальная последовательность в X, $\|e_n\| = 1$, $n \geqslant 0$; $\{e^*_n\}_{n\geqslant 0}$ — биортогональная последовательность функционалов, тотальная на X. Пусть $\lambda_n \neq 0$, $w_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}$, $n \geqslant 1$, $w_0 = 1$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *при больших $N \in \mathbf{N}$:* $\sup\limits_{k,n\geqslant N} \left|\dfrac{w_{k+n-N}}{w_k \cdot w_n}\right| < +\infty$.

2) $\exists N \in \mathbf{N}$: $\sum\limits_{s\geqslant N} (s+1) \left|\dfrac{w_s}{w_{s-N}}\right| \|e^*_s\| < +\infty$,

3) *оператор T_Λ непрерывен в X.*

Тогда $T_\Lambda \in \mathrm{Sint}$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathrm{Lat}\, T_\Lambda$, $E \neq X$, и $x \in E$, $x^* \in E^\perp$ ($x^* \neq 0$). Если $m = \min\{k : (e_k, x^*) \neq 0\}$, то $x^* \sim \sum\limits_{k\geqslant m} (e_k, x^*)\, e^*$, $x \sim \sum\limits_{k\geqslant 0} (x, e^*_k)\, e_k$. По определению оператора T_Λ,

$$T^n_\Lambda x \sim \sum_{k\geqslant 0} \lambda_k \ldots \lambda_{k+n-1} \left(x, e^k_{k+n}\right) e_k = \sum_{k\geqslant 0} \frac{w_{k+n}}{w_k} \left(x, e^*_{k+n}\right) e_k.$$

Так как этот ряд абсолютно сходится при больших n (условие 2)), то

$$\left(T^n_\Lambda x, x^*\right) = \sum_{k\geqslant m} \frac{w_{k+n}}{w_k} \left(x, e^*_{k+n}\right) (e_k, x^*) = 0.$$

Не умаляя общности, будем считать, что $(e_k, x^*) = 0$ при $m < k < m+N$, где N — из условия 2) (в противном слу-

[8] В [44] содержится лишь простейший вариант этой теоремы.

чае заменим x^* на $x^* + \sum_{i=1}^{N} a_i T_\Lambda^{*i} x^*$ с подходящими коэффициентами a_i, $a_i \in \boldsymbol{C}$). Тогда

$$|(x, e_{m+n}^*)| \leqslant \mathrm{const} \sum_{k \geqslant m+N} \left| \frac{w_{k+n}}{w_{m+n} w_k} \right| |(x, e_{k+n}^*)| \, \| x^* \|.$$

Поскольку

$$\left| \frac{w_{k+n}}{w_k \cdot w_{m+n}} \right| = \left| \frac{w_{k+n-N}}{w_k \cdot w_{m+n}} \cdot \frac{w_{k+n}}{w_{k+n-N}} \right| \leqslant \mathrm{const} \left| \frac{w_{k+n}}{w_{k+n-N}} \right|$$

по условию 1), то

$$|(x, e_{m+n}^*)| \leqslant \|x\| \cdot \left\{ \mathrm{const} \sum_{k \geqslant m+N} \left| \frac{w_{k+n}}{w_{k+n-N}} \right| \cdot \|e_{k+n}^*\| \right\}$$

при больших $n \in \boldsymbol{N}$. Обозначим множитель при $\|x\|$ через M_{n+m} и положим $M_i = \|e_i^*\|$ для тех (малых) значений $i \geqslant 0$, которых нет среди чисел $m+n$. Из условия 2) следует $\sum_n M_n < +\infty$. Это, в свою очередь, влечет относительную компактность единичного шара B в подпространстве E. Действительно, если числа $\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ и $p\,(p \in \boldsymbol{N})$ таковы, что $\sum_{n \geqslant p+1} M_n < \varepsilon$, то множество

$$\left\{ \sum_{k=0}^{p} (x, e_k^*) e_k : x \in E, \ \|x\| \leqslant 1 \right\}$$

образует компактную ε-сеть для шара B. По теореме Рисса заключаем, что $\dim E < +\infty$. Следовательно, корневые векторы оператора T_Λ, содержащиеся в E, порождают это подпространство.

Пример. Если последовательность $\{|\lambda_k|\}_{k \geqslant 0}$ не возрастает на некоторых арифметических прогрессиях, например, если $|\lambda_{kr+j}| \downarrow$ при $k \to \infty$ и $j = 0, \ldots, r-1$, то выполнено условие 1). Если существует число ε, $\varepsilon > 0$, такое что

$$\prod_{j=0}^{r-1} \lambda_{kr+j} = O\left(\frac{1}{r^\varepsilon}\right) \quad \text{при } r \to \infty$$

и если $\|e_s^*\| = O(s^p)$ при некотором $p > 0$, то выполнено условие 2). Иногда этого уже достаточно и для непрерывности оператора T_Λ, который тем самым оказывается синтезируемым. В частности, это так, если $X=l^p$, $e_k=\{\delta_{nk}\}_{n\geqslant 0}$ — естественный базис пространства l^p.

Нетрудно привести и другие примеры; об оценках норм „естественных“ биортогональных последовательностей в весовых пространствах аналитических функций [6]. Несмотря на простоту достаточного условия синтезируемости, полученного в теореме, это условие улавливает на качественном уровне следующее существенное обстоятельство: одноклеточность оператора T_Λ зависит от некоторой „обобщенной монотонности“ весовой последовательности $\{|\lambda_k|\}_{k\geqslant 0}$ на достаточно „густых“ подмножествах натурального ряда (близких к арифметическим прогрессиям, как будет показано).

Возможен и другой подход к вопросу об одноклеточности оператора T_Λ (или, что то же, оператора T_Λ^*). Одноклеточность T_Λ^* означает, что оболочка $V(T_\Lambda^{*n}x: n\geqslant 0)$ совпадает с одним из „стандартных“ подпространств $X_n^\perp=V(e_k^*: k\geqslant n), n\geqslant 0$, каков бы ни был элемент x, $x\neq 0$, $x\in X^*=l^{p'}\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1,\ 1\leqslant p\leqslant\infty\right)$. Другими словами элемент x является T_Λ^*-циклическим в подпространстве $X_n^\perp$, $n=\min\{i: x_i\neq 0\}$. Несколько более сильное свойство может быть адекватно переведено на язык весовой последовательности Λ: Именно, назовем оператор T_Λ^* сверхциклическим [9], если последовательность $\{T_\Lambda^{*n}x/\|T_\Lambda^{*n}x\|: n\geqslant 0\}$ линейно подобна части стандартного базиса в $l^{p'}$ с конечной коразмерностью $\forall x\in l^{p'}, x\neq 0$.

Теорема [45, 6]. 1) *Оператор T_Λ^* сверхцикличен в пространстве $l^{p'}$ в том и только в том случае, когда $\rho(\Lambda)=0$ $\left(\rho(\Lambda)\overset{\text{def}}{=}\varliminf_n |w_n|^{\frac{1}{n}}\right)$ и $l^{p'}(w_{n+j})$ есть банахова алгебра относительно свертки при любом $j\geqslant 0$.*

2) *Сверхцикличность влечет одноклеточность* (*т. е.* $T_\Lambda\in\mathrm{Sint}$).

3) *Если* $\rho(\Lambda)>0$, *то оператор T_Λ^* не одноклеточен* (*даже* $T_\Lambda\notin\mathrm{Anal}$).

---

[9] В работах [45, 46, 6, 2] использованы термины «базисный», «производящий базисы».

4) *Если* $\rho(\Lambda)=0$ *и* $l^{p'}(w_n)$ *есть банахова алгебра, то* $T_\Lambda \in \mathrm{Anal}$.

Для доказательства теоремы следует перейти от оператора T_Λ^* к унитарно эквивалентному ему правому сдвигу $S\,(S=T_1^*)$ в весовом пространстве $l^{p'}(w_n)$. Нетрудно видеть, что $\sigma_p(S^*) \neq \{0\} \Leftrightarrow \rho(\Lambda) > 0$, и что при $\rho(\Lambda) > 0$ оператор S может быть реализован как оператор умножения на z в пространстве $l_\Lambda^p(w_n)$ всех функций f, регулярных в круге $\{\zeta \in \boldsymbol{C} : |\zeta| < \rho(\Lambda)\}$ и таких, что $\{\hat{f}(n)\}_{n\geqslant 0} \in l^{p'}(w_n)$. Отсюда легко следует утверждение 3) и может быть выведена необходимость условия $\rho(\Lambda)=0$ для сверхцикличности. После этого импликация 2) делается почти очевидной, а 4) вытекает из общей теории банаховых алгебр: условие $\rho(\Lambda)=0$ означает, что алгебра $l^{p'}(w_n)$ содержит лишь один максимальный идеал $X_1^\perp = \{x = \{x_i\}_{i\geqslant 0} : x_0 = 0\}$ и, стало быть, любой идеал (т. е. S-инвариантное подпространство) содержится в $X_1^\perp$. Доказательство 1), главного утверждения теоремы, базируется на следующем наблюдении: изоморфизм пространства $l^{p'}(w_n)$, который неявно присутствует в определении сверхцикличности, обязательно является оператором свертки в алгебре $l^{p'}(w_{n+j})$, $j=\min\{k : x_k \neq 0\}$. Это наблюдение использовалось впоследствии многими авторами [42, 43, 45].

Условие

$$\sup_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{w_n}{w_k w_{n-k}}\right|^p\right)^{1/p} < +\infty \qquad (10_p)$$

достаточно для того, чтобы пространство $l^{p'}(w_n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, было алгеброй относительно свертки, а при $p=1$, ∞ оно и необходимо [47, 6]. Если $|\lambda_n| \downarrow$, то это условие необходимо и при $1<p<\infty$ [48]. В последней работе также доказано, что $l^{p'}(w_n)$ есть алгебра в том и только в том случае, когда оператор T_Λ^* „сильно цикличен" в том смысле, что существует $x \in l^{p'}$, для которого $\mathscr{R}(T_\Lambda^*)\,x = l^{p'}$. Многочисленные примеры весовых последовательностей $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, для которых $l^{p'}(w_{n+j})$ есть алгебра при всех $j\geqslant 0$ и $1\leqslant p\leqslant\infty$, приведены в [45, 46, 6]. В частности, среди них имеются последовательности, убывающие (на арифметических подпрогрессиях) значительно медленнее, чем указанные в примере на с. 268 (характерный порядок убывания — $1/\log_m n$, где $\log_m n = \underbrace{\log\ldots\log}_{m} n$). Однако если потребовать сверхцикличности в l^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, любого оператора T_M^* с $|\mu_n|\downarrow$, $|\mu_n|\leqslant\lambda_n$ (как это имеет место в упомянутом примере при $r=1$), то необходимо $\lambda_n = O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right)$ при некотором $\varepsilon>0$ [45, 46, 6]. Отметим, наконец, что условие 1) первой из доказанных выше теорем равносильно совокупности условий (10_∞) для последовательностей $\{w_{n+j}\}_{n\geqslant0}$, $j\geqslant0$ (т. е. тому, что $l^1(w_{n+j})$ есть алгебра при любом $j\geqslant0$).

Бывает ли так, что $\rho(\Lambda)=0$ (или $\sigma(T_\Lambda)=\{0\}$, или даже $\lim\limits_n \lambda_n=0$; $\lambda_n\neq0$, $\forall n$), но $T_\Lambda\notin \mathrm{Sint}$? Ответ положителен; соответствующие примеры содержатся в [49, 46, 6]. Можно даже добиться, чтобы при этом пространство $l^{p'}(w_n)$ было алгеброй (и, значит, $T_\Lambda\in\mathrm{Anal}$); при $p'=1$ это дает ответ на один вопрос Г. Е. Шилова. Вот качественное описание построений из [40, 46, 6]. Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geqslant0}$ — ограниченная последовательность комплексных чисел; $P=\{n_k\}_{k\geqslant1}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\sup_{k\geqslant1}(n_{k+1}-n_k)=+\infty. \tag{11}$$

Если бы оператор T_Λ^* был не взаимно однозначен (т. е. $\lambda_n=0$ при некотором $n\geqslant0$), то его ядро $\operatorname{Ker} T_\Lambda^*$ давало бы подпространство из $\operatorname{Lat} T_\Lambda^*$, не совпадающее ни с одним из „стандартных" (если $T_\Lambda\neq0$). Это „линейно-алгебраическое" соображение можно превратить в „аналитическое": заменим числа λ_{n_k} очень малыми числами μ_k, $\mu_k>0$, $k\geqslant1$; тогда оператор $T^{n_k-n_{k-1}}$, $T\overset{\mathrm{def}}{=}T_\Lambda^*$, почти аннулирует орты e_s, $n_{k-1}\leqslant s\leqslant n_k$, в то время как $T^{n_k-n_{k-1}}e_s$ при $s>n_k$ все еще весьма велики, если $n_{k+1}-n_k\gg n_k-n_{k-1}$. Если количественно учесть это различие, то мы придем к оценкам типа $\|t_sT^sx-e_{n(s)+s}\|_{p'}\leqslant d_s$, $s\geqslant0$, в которых $\{n(s)\}_{s\geqslant0}$ — растущая последовательность, наличие которой обусловлено упомянутыми скачками величин $\|T^ne_m\|_{p'}$, x — элемент $l^{p'}$, „чувствительный" к таким скачкам, t_s — нормирующие множители и $\sum\limits_{s\geqslant0}d_s<1$. Полученная близость векторов $t_s T^s x$ к части стандартного базиса пространства $l^{p'}$ позволяет указать изоморфизм $l^{p'}$ на себя, переводящий $V(T^s x : s \geqslant 0)$ в $V(l_{n(s)+s} : s \geqslant 0)$. Следовательно, $\operatorname{codim} V(T^s x : s \geqslant 0) = +\infty$ и $T_\Lambda \notin \mathrm{Sint}$.

Описанное рассуждение показывает, что $T^*_{\Lambda'} \notin \mathrm{Sint}$ для любой последовательности $\Lambda' = \{\lambda'_n\}_{n\geqslant 0}$ с $\lambda'_n = \lambda_n$, $n \notin P$; $|\lambda'_{n_k}| < \mu_k$, $k \geqslant 1$. В частности, это можно истолковать как доказательство точности тех признаков синтезируемости, что были отмечены в примере на с. 268. Действительно, положим для простоты $p' = 1$ и пусть $|\lambda_n| \downarrow$ при $n \notin P$ и $|\lambda_n| \downarrow 0$ при $n \in P$, $P \subset N$. Если P — арифметическая прогрессия, то $T_\Lambda \in \mathrm{Sint}$ (T_Λ действует в l^∞), если же P — „редкая" последовательность в смысле (11), то, вообще говоря, $T_\Lambda \notin \mathrm{Sint}$. Конкретный пример последнего типа [40]:

$$P = \{2^k + 1\}_{k\geqslant 1}, \ \lambda_n = 2^{-n}, \ n \notin P, \ \lambda_{2^k+1} = 2^{-2^{(k+1)^2}}, \ k \geqslant 1.$$

Заканчивая, я хочу обратить внимание читателя на обзорную статью А. Шилдса [50], где дано многоплановое описание задач, связанных с операторами взвешенного сдвига [10]. Случаю $\rho(\Lambda) > 0$ посвящена также II часть настоящей статьи, которая будет опубликована позднее.

§ 8. Нерешенные задачи

Приводимый ниже список задач о спектральном синтезе „абстрактных" операторов в банаховых пространствах можно условно разбить на две части. Первая из них содержит по большей части вопросы „постановочного" характера, связанные с попытками достичь нового уровня понимания в проблеме анализа-синтеза. Вторую часть составляют в основном конкретные задачи, решение которых может внести существенный (а для некоторых разделов — определяющий) вклад в развитие круга идей, содержащихся в § 1—7. Формулировки навеяны работами [1—64], размышлениями над ними и беседами с заинтересованными лицами. За малыми исключениями они, однако, нигде ранее не были опубликованы.

[10] Отметим также работы [51—56] и особенно [54—56], где рассматриваются взвешенные сдвиги в общих банаховых пространствах.

Некоторые общие задачи. Первый цикл вопросов связан с обобщением концепции синтезируемости.

Задача 1. Отыскание сильнейшей („критической") топологии, пригодной для спектрального синтеза.

Пусть T — полный оператор в пространстве X; требуется указать по возможности более сильную топологию τ, мажорируемую топологией τ_X, и такую, что любое τ-замкнутое T-инвариантное подпространство E синтезируется (т. е. $E = V_\tau(E \cap K_T)$, где $V_\tau(\ldots)$ — τ-замыкание линейной оболочки множества $(\ldots)$).

Если, например, пространство X_1 непрерывно вложено в пространство X_2, полный оператор T непрерывен из X_i в X_i $(i=1, 2)$, $T \in \mathrm{Sint}_{X_2}$, и все его корневые векторы содержатся в X_1, то одной из топологий τ для пространства X_1 будет τ_{X_2}. Типичный пример [11]: X_1 — пространство функций, аналитических в круге $\boldsymbol{D}$, X_2 — класс всех регулярных в $\boldsymbol{D}$ функций, $T = S^*$ — левый сдвиг $\left(S^*f = \frac{f - f(0)\mathbf{1}}{z}\right)$; однако, топология τ_{X_2}, конечно, весьма слаба и далека, по-видимому, от „критической", если X_1 — нормированное пространство. Вообще, если X_1 — нормированное пространство, то в качестве τ также естественно искать топологию, порождаемую нормой.

Если интерпретировать упомянутую топологию τ как некоторое „оснащение" пространства X, то можно усмотреть аналогию между τ-синтезируемостью оператора T и известной теоремой Гельфанда — Костюченко о полноте обобщенных собственных функций произвольного самосопряженного оператора в (оснащенном) гильбертовом пространстве.

Задача 2. Индивидуальный спектральный синтез.

Будем говорить, что элемент x допускает T-синтез, и писать $x \in \mathrm{Sint}\, T$, если $E = V(E \cap K_T)$, где $E = V(T^n x : n \geqslant 0)$. Требуется описать множество $\mathrm{Sint}\, T$, или хотя бы указать эффективные достаточные условия для вхождения в $\mathrm{Sint}\, T$.

Аналогичную „индивидуальную" форму можно придать и задаче „спектрального анализа". Ясно, что $\mathrm{Sint}\, T = X \Leftrightarrow T \in \mathrm{Sint}$. Если семейство (конечномерных) корневых подпространств оператора T топологически сво-

---

[11] Примеры такого типа являются центральным объектом II части доклада.

бодно и $\mathscr{E}_\lambda$, $\lambda\in\sigma_p(T)$,— соответствующие проекторы, то $x\in\operatorname{Sint} T\Leftrightarrow(\mathscr{E}_\lambda x\in E_x,\ \forall\lambda;\ x\in V(\mathscr{E}_\lambda x:\lambda\in\sigma_p))$. Таким образом, возможность T-синтеза для элемента x может быть обеспечена „гладкостью“ x относительно спектрального семейства $\{\mathscr{E}_\lambda:\lambda\in\sigma_p\}$ (например, такой, которая гарантирует суммируемость ряда $\sum\limits_\lambda \mathscr{E}_\lambda x$). В самом общем случае (при единственном предположении тотальности $\{\mathscr{E}_\lambda\}$) А. С. Маркус доказал (неопубликовано), что существует строго положительная функция a на точечном спектре $\sigma_p(T)$ со свойством:

$$x\sim\sum_\lambda \mathscr{E}_\lambda x,\ \|\mathscr{E}_\lambda x\|<a(\lambda)\Rightarrow x\in\operatorname{Sint} T.$$

Интересно было бы определить точный порядок малости функции a; нетрудно видеть, что в своей существенной части этот вопрос сводится к изучению допустимого „порядка малости“ ненулевых мер μ, сосредоточенных на $\sigma_p(T)$ и ортогональных многочленам. В такой формулировке обсуждаемая задача восходит к Е. Борелю и А. Данжуа [28, 58].

Здесь же уместно отметить и вопрос о зависимости свойства „$x\in\operatorname{Sint}$“ от геометрических особенностей „спектра“ $\{\lambda:\mathscr{E}_\lambda x\neq 0\}$; элементы такого подхода содержатся в [15].

З а д а ч а 3. Аппроксимативный синтез.

Пусть T — полный оператор в X, $K_n\in\operatorname{Lat} T$, $n\geqslant 1$; тогда подпространство $\varliminf\limits_n K_n \overset{\text{def}}{=} \{x\in X:\lim\limits_n \operatorname{dist}(x,K_n)=0\}$ также инвариантно относительно T. Требуется доказать, что (или описать те операторы T, для которых) каждое T-инвариантное подпространство E аппроксимируется конечномерными, т. е. $E=\varliminf\limits_n K_n$ для некоторых K_n,

$$\dim K_n<+\infty,\quad K_n\in\operatorname{Lat} T.$$

Понятие нижнего предела последовательности подпространств введено, по-видимому, Дж. фон Нейманом и использовано им для доказательства известной теоремы о нетривиальности $\operatorname{Lat} T$ для вполне непрерывных операторов [2]. Синтезируемость подпространства E равносильна равенству $E=\varliminf\limits_n K_n$ с возрастающей $(K_n\subset K_{n+1})$ последовательностью $\{K_n\}_{n\geqslant 1}$, $\dim K_n<\infty$, $K_n\in\operatorname{Lat} T$. Мне известен лишь один нетривиальный оператор T, для которого задача 3 решена [59]: это оператор левого сдвига S^* в пространстве Харди H^2. Выяснены и условия, при которых $\varliminf_n K_n \neq H^2$: если $K_n = H^2 \ominus B_n H^2$, $B_n = \prod_\lambda b_\lambda^{k_n(\lambda)}$, то

$$\varliminf_n K_n \neq H^2 \Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 1} \sum_\lambda k_n(\lambda)(1-|\lambda|) < +\infty. \qquad (12)$$

Эти результаты принадлежат, по существу, Г. Ц. Тумаркину и изложены в [59, 60]. Критерии нетривиальности $\varliminf_n K_n \neq X$ (обобщающие тем самым теоремы о полноте рациональных функций с фиксированными полюсами) представляются неотъемлемой частью такого „аппроксимационного“ подхода; поскольку при этом подпространства K_n натягиваются на корневые векторы из $K_n \cap E_\lambda$, $\lambda \in \sigma_n$ (σ_n — конечное множество), то речь идет об изучении некоторой „T-емкости“ подмножеств точечного спектра $\sigma_p(T)$, подобной емкости (12). Обсуждение этих вопросов имеется в [60 и 61]; последняя статья содержит также общее достаточное условие нетривиальности предела $\varliminf_n K_n$.

Возможно, впрочем, что „аппроксимативную синтезируемость“ следует понимать в двойственной форме: $TE \subset E \Rightarrow E^\perp = \varliminf_n K_n^\perp$, где $K_n \in \operatorname{Lat} T$, $\dim K_n < +\infty$.

Задача 4. Синтез специальных подпространств.

Отметим две возможности: а) синтез гиперинвариантных подпространств; б) синтез спектральных подпространств.

Задача а) состоит в описании тех полных операторов T, для которых все гиперинвариантные (т. е. инвариантные относительно любого оператора[12)], перестановочного с T) подпространства E синтезируются (т. е. $E = V(E \cap \mathfrak{K}_T)$). Если собственные подпространства $E'_\lambda = \operatorname{Ker}(T-\lambda I)$, $\lambda \in \sigma_p(T)$, полны в X, то коммутант $\{T\}'$ состоит из всех мультипликаторов семейства $\{E'_\lambda: \lambda \in \sigma_p\}$, т. е. из операторов A, для которых $AE'_\lambda \subset E'_\lambda$, $\forall \lambda \in \sigma_p(T)$. Иногда это обстоятельство тривиализует задачу о синтезировании подпространств из $\operatorname{Lat}\{T\}'$ (как, например, для нормальных операторов), иногда меняет ее не слишком сильно по сравнению с синтезом в $\operatorname{Lat} T$ (как, например,

[12)] Множество всех таких операторов обозначим символом $\{T\}'$.

для операторов с $\{T\}' = \mathcal{R}(T)$ или для операторов из § 2).

Задача б) — указать критерий синтезируемости спектральных подпространств (в смысле Е. Бишопа — Н. Данфорда). Опуская определения [2], отметим, что наиболее интересен случай полного оператора T из „класса Левинсона" (неквазианалитического), т. е. такого, для которого спектр $\sigma(T)$ лежит на гладкой кривой γ и

$$|R(\lambda, T)| \leqslant \varphi(\operatorname{dist}(\lambda, \gamma)), \quad \int_0^\infty \log^+\log^+ \varphi(t)\,dt < +\infty.$$

Разумеется, несинтезируемые подпространства, подтверждающие точность теорем из § 1 (см. § 1, 4), не являются спектральными.

Задача 5. Синтез на несчетном спектре.

Требуется выяснить, при каких дополнительных условиях несчетность точечного спектра $\sigma_p(T)$ влечет отсутствие синтеза.

Следует различать два случая: „вещественный" ($\sigma(T)$ нигде не плотен и разбивает плоскость) и „аналитический" ($\sigma(T)$ не обладает отмеченным свойством). Среди известных результатов о синтезе „вещественных" операторов встречаются обе возможности. Например, модифицируя известную теорему П. Мальявена [3], можно проверить, что оператор $S+S^*$ не синтезируем в пространстве X всех последовательностей x на $\boldsymbol{Z}$ для которых $\lim\limits_{n} x_n(|n|+1)^{-1}=0$ и $x_n = x_{-n}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. С другой стороны, оператор, сопряженный к умножению на независимую переменную ($f(x) \to xf(x)$) в пространстве $\operatorname{lip}\alpha$ липшицевых функций на сегменте $[0, 1]$, $0<\alpha<1$, допускает спектральный синтез [62]. В „аналитическом" случае, напротив, все имеющиеся результаты указывают на отсутствие синтеза (особенно характерны операторы, для которых $\sigma_p(T)$ обладает аналитической структурой, например, операторы, сопряженные к умножению на z в пространствах аналитических функций); имеются веские основания полагать, что $T \notin \operatorname{Sint}$, если X — банахово пространство, $\sigma_p(T)$ несчетен и T — „аналитический" оператор (см. [2, 6] и II часть настоящей статьи).

Задача 6. Синтезируемость влечет цикличность?

Требуется доказать, что при $T \in \operatorname{Sint}$ каждое T-инвариантное подпространство является „главным", т. е. $TE \subset E \Rightarrow E = \bigvee(T^n x : n \geqslant 0)$ при некотором $x \in E$.

Если точечный спектр $\sigma_p(T)$ счетен (или только $\sigma_p(T|E)$ счетен для всех $E\neq X$), то требуемый факт почти очевиден — в качестве воспроизводящего вектора x можно взять сумму ряда $\sum\limits_{\lambda} a_\lambda e_\lambda$ с малыми коэффициентами $a_\lambda\neq 0$; $\{e_\lambda\}$ — линейно независимое семейство корневых векторов, полное в E.

Задача 7. Для каких f и T $T\in \mathrm{Sint}\Rightarrow f(T)\in \mathrm{Sint}$?

Результаты § 5 показывают, что для нормальных обратимых операторов и функции $f=\frac{1}{z}$ может быть как $f(T)\in \mathrm{Sint}$, так и $f(T)\notin \mathrm{Sint}$. Тривиальное достаточное условие — $\mathrm{Lat}\, T=\mathrm{Lat}\, f(T)$.

Задача 8. В каких случаях $T_i\in \mathrm{Sint}\Rightarrow T_1\oplus T_2\in \mathrm{Sint}$?

Если T — нормальный синтезируемый оператор, то и $T\oplus T$ таков же (следствие теоремы Вермера); однако уже $T\oplus(-T)$ может не допускать синтеза при $T\in \mathrm{Sint}$ (см. примеры из § 5). В работе [40] доказано, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\oplus\, T_\Lambda\in \mathrm{Sint}$ примерно при тех же условиях на последовательность Λ, что и в § 7.

Более специальные задачи.

К § 1. К этому параграфу непосредственное отношение имеет задача 4: можно предполагать, что при условиях типа

$$|R(\lambda, T)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{||\lambda|-1|^N},\quad |\lambda|\neq 1,\quad |\lambda|\leqslant 2,$$

спектральные подпространства оператора T допускают синтез.

К § 2. 3.

Задача 9. Распространить результаты § 2 на случай $\dim E_\lambda<+\infty$ $\lambda\in\sigma_p(T)$.

Задача 10. Следует ли из наследственной полноты минимального семейства $\{e_\lambda\}$ существование метода суммирования [13] формальных рядов Фурье $x\sim\sum\limits_{\lambda}(x, e_\lambda^*)\, e_\lambda$?

---

[13] Линейного, конечнострочного. Другими словами, речь идет о существовании последовательности операторов $\{A_n\}$ $n\geqslant 1$ таких, что $A_nX\subset \mathscr{E}\sigma_nX$ и $\lim\limits_n A_n\mathscr{E}\sigma_n x=x$, $\forall x$ (хотя бы в смысле слабой сходимости); здесь σ_n — конечные подмножества точечного спектра.

Если $\{e_\lambda\}$ — семейство корневых векторов сжатия класса C_0, то ответ положителен [63]. Положителен он также и во всех других изученных случаях [1, 2].

Задача 11. Пусть μ — конечная мера на окружности $\boldsymbol{T}$. При каких условиях на μ семейство $\{z^n : n \in \boldsymbol{Z}\}$ наследственно полно в $L^2(\mu)$?

Необходимое и достаточное условие минимальности: $d\mu_a = G dm$, $\frac{1}{G} \in L'(T)$, где m — мера Лебега на $\boldsymbol{T}$, μ_a — абсолютно непрерывная компонента. Различные достаточные условия наследственной полноты вытекают из известных теорем о степенных базисах или базисах суммирования (литературу см. в [2, 6]); некоторую информацию по вопросу 11 можно извлечь из статьи [64].

К § 4. Задача 12. Какие классы операторов допускают полные расширения (по схеме § 4) в пределах того же класса? Какие симметрично-нормированные идеалы (кроме $\mathfrak{S}_\infty$) обладают этим свойством?

Задача 13. Какой оператор может быть частью полного оператора, допускающего „анализ“?

Отметим еще раз, что расширение из § 4 приводит к операторам T с минимальным семейством собственных векторов, обладающим нетотальным биортогональным (т. е. $T \notin \mathrm{Anal}$; эквивалентно: T^* — неполный оператор).

К § 5. Задача 14. Какой оператор может быть частью полного нормального оператора? Существуют ли у таких операторов нетривиальные инвариантные подпространства бесконечной коразмерности?

Для общих субнормальных операторов последний вопрос привлекал внимание многих авторов [2].

Задача 15. Описать полные нормальные операторы T, для которых $\sigma(T|E) \subset \sigma(T)$ при любых $E \in \mathrm{Lat}\, T$.

Трудный случай — когда спектр $\sigma(T)$ нигде не плотен [23, 2]. Здесь речь идет о чисто точечных (атомических) мерах, сосредоточенных на нигде неплотных множествах и ортогональных многочленам. Существование таких мер предполагал Р. Э. Вальский; соответствующие примеры недавно построены А. Б. Александровым.

Задача 16. Пусть T — синтезируемый нормальный оператор с простым спектром. Верно ли, что $AT = TA$, $A \in \mathfrak{S}_1$ влечет $T + A \in \mathrm{Sint}$?

Если T — унитарный оператор, то легко видеть, что ответ положителен. В то же время уже в этом простейшем случае $\mathfrak{S}_1$ нельзя заменить ни на какой другой с.-н. идеал (см. § 6).

К § 6. Задача 17. Для каких с.-н. идеалов $\mathfrak{S}$ полные диссипативные операторы A с $A_J \in \mathfrak{S}$ допускают спектральный синтез? Какие операторы могут быть расширены до полных операторов A с $A_J \geqslant 0$, $A_J \in \mathfrak{S}$?

Задача 18. Пусть T — вполне неунитарное сжатие класса C_{00} в пространстве H, резольвента которого мероморфна в круге $\boldsymbol{D}$, θ_T — характеристическая функция T. Верно ли, что из

$$\lim_{r \to 1-0} \int_{\mathbf{T}} \log |\theta_T(r\zeta)| \, dm(\zeta) = 0. \tag{13}$$

следует $V(K_T) = H$ (т. е., что T — полный оператор)?

Если T — слабое сжатие, то ответ положителен; это можно усмотреть из результатов [32] и следующего известного утверждения: внутренняя (скалярная) функция θ_T есть произведение Бляшке в том и только в том случае, когда имеет место (13).

Задача 19. Пусть H — гильбертово пространство аналитических в области G функций с воспроизводящим ядром $k(\cdot, \cdot)$. Верно ли, что семейство $\{k(\cdot, \lambda) : \lambda \in \sigma\}$, $\sigma \subset G$, либо полно в H, либо наследственно полно в замыкании своей линейной оболочки?

Примеры классических пространств такого типа (и, в частности, H^2) могут служить подтверждением этой гипотезы. Более детальная мотивировка приводится во II части статьи.

К § 7. Обзор А. Шилдса [50] содержит формулировки 33 интересных задач об операторах типа T_Λ, действующих в l^2. Некоторые из этих задач, правда, уже решены [66]. Я дополню этот список лишь следующими тремя вопросами.

Задача 20. $T_\Lambda \in \mathrm{Sint} \Rightarrow \rho(T_\Lambda) = 0$?

Этот вопрос — частный случай задачи 5.

Задача 21. $|\lambda_n| \downarrow 0 \Rightarrow T_\Lambda \in \mathrm{Sint}$?

Здесь предполагается, что оператор T_Λ действует в пространстве l^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. При $p = 1$ ответ очевидным образом положителен (см. § 7).

Задача 22. Будет ли оператор T_Λ^* сверхцикличеким при условии $T_\Lambda \in \mathrm{Sint}$?

Положительный ответ в задаче 21 (при $p > 1$) влечет отрицательный ответ в задаче 22.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques.— "Ann. of Math.", 1947, v. 48, N 4, p. 857—927.
2. Никольский Н. К. Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций.— В кн.: Математический анализ. Т. 12, М., ВИНИТИ, 1974, с. 199—412.
3. Hewitt E., Ross K. Abstract harmonic analysis. II. Berlin, Springer, 1970. 771 S.
4. Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables. N. Y., Wiley — Interscience, 1970. 506 p.
5. Ferrier J. P. Spectral theory and complex analysis.— In: North — Holland Math. Stud. v. 4. Amsterdam — London, N. H. Publ. Comp., 1973. 93 p.
6. Никольский Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа.— В кн.: Труды математического института им. В. А. Стеклова. Т. 120. М.— Л., «Наука», 1974. 270 с.
7. Bochner S., von Neumann J. Almost periodic functions in a group. II.— "Trans. Amer. Math. Soc.", 1935, v. 37, p. 21—51.
8. Любич Ю. И. Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора.— «Усп. мат. наук», 1963, т. 18, № 1, с. 165—171.
9. Любич Ю. И. Консервативные операторы.— «Усп. мат. наук», 1965, т. 20, № 5, с. 221—225.
10. Маркус А. С., Никольская Л. Н., Никольский Н. К. Об унитарном спектре сжатия в банаховом пространстве.— В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 22. Л., 1971, с. 65—74.
11. Никольский Н. К. К спектральному анализу на унитарном спектре. Точечный спектр.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 199, № 3, с. 544—547.
12. Gillespie T. A., West T. T. Operators generating weakly compact groups.— "Indiana Univ. Math. J.", 1972, v. 21, N 8, p. 671—688.
13. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962, 829 с.
14. Hamburger H. L. Über die Zerlegung des Hilbertschen Raumes durch vollstetige lineare Transformationen.— "Math. Nachr.", 1951, v. 4, p. 56—69.
15. Маркус А. С. Задача спектрального анализа для операторов с точечным спектром.— «Изв. АН СССР. Серия мат.», 1970, т. 34, № 3, с. 662—688.
16. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965. 448 с.
17. Никольский Н. К. Полные расширения вольтерровых операторов.— «Изв. АН СССР. Серия мат.», 1969, т. 33, № 6.
18. Никольский Н. К. К спектральному анализу на унитарном спектре. Точечный спектр. II.— В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 22. Л., 1971, с. 75—88.
19. Хавинсон С. Я. О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов.— «Изв. АН Арм. ССР. Серия мат.», 1971, т. 6, № 2—3, с. 221—234.
20. Хрущев С. В. Стирание особенностей интегралов Коши и аналог теоремы Хинчина — Островского для последовательностей

растущих функций.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, № 3.
21. **Nikolskii N. K.** Analysis and synthesis for the point and unitary spectra. II.—"Bull. Amer. Math. Soc.", 1975, v. 81, N 1, p. 173—176.
22. **Bram J.** Subnormal operators.—"Duke Math. J.", 1955, v. 22, N 1.
23. **Halmos P. R.** Normal dilations and extensions of operators.—"Summa Brasil. Math.", 1950, v. 2, p. 125—134.
24. **Sarason D.** Weak-star density of polinomials.— "J. reine und angew. Math.", 1972, v. 252, p. 1—15.
25. **Wermer J.** On invariant subspaces of normal operators.— "Proc. Amer. Math. Soc.", 1952, v. 3, N 2, p. 270—277.
26. **Sarason D.** Invariant subspaces and unstarred operator algebras.— "Pacif. J. Math.", 1966, v. 17, N 3, p. 511—517.
27. **Goodman R. W.** Invariant subspaces for normal operators.— "J. Math. Mech.", 1966, v. 15, N 1, p. 123—128.
28. **Wolff J.** Sur les series $\sum \frac{A_n}{z - z_n}$.— "C. r. Acad. sci. Paris", 1921, v. 173, p. 1056—1059, 1327—1328.
29. **Hoffman K., Rossi H.** Extensions of positive weak*-continuous functionals.—"Duke Math. J.", 1967, v. 34, N 3, p. 453—466.
30. **Rubel L. A., Shields A. L.** The space of bounded analytic functions on a region.— "Ann. Inst. Fourier", 1966, v. 16, N 1, p. 235—277.
31. **Brown A., Shields A., Zeller K.** On absolutely convergent exponential sums.—"Trans. Amer. Math. Soc.", 1960, v. 96, N 1.
32. **Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч.** Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1970. 431 с.
33. **Никольский Н. К.** Инвариантные подпространства оператора сдвига и слабо обратимые элементы в L^∞. — «Докл. АН СССР», 1966, т. 167, № 5, с. 985—988.
34. **Никольский Н. К.** Пять задач об инвариантных подпространствах.— В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 23. Л., 1971, с. 115—125.
35. **Бродский М. С.** Об операторах с ядерными мнимыми компонентами.— "Acta scient. math.", 1966, v. 27, N 3—4, p. 147—155.
36. **Legget R.** On the invariant subspace structure of compact dissipative operators.— "Indiana Univ. Math. J.", 1973, v. 22, N 10.
37. **Helson H.** Lectures on invariant subspaces. N. Y., Academic Press, 1964. 130 p.
38. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., «Наука», 1967.
39. **Бродский М. С.** Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 287 с.
40. **Никольский Н. К.** Об инвариантных подпространствах взвешенных операторов сдвига.— «Мат. сб.», 1967, т. 74, № 2, с. 171—190.
41. **Бродский М. С.** О жордановых клетках бесконечномерных операторов.— «Докл .АН СССР», 1956, т. 111, № 5, с. 926—929.
42. **Хапланов М. Г.** Линейные операторы в $A(U)$.—«Докл. АН СССР», 1951, т. 80, с. 21—24.
43. **Donoghue W. K. Jr.** The lattice of invariant subspaces of complety continuous quasinilpotent transformation.—"Pacific J. Math.", 1957, v. 7, N 2, p. 1031—1035.
44. **Никольский Н. К.** Инвариантные подпространства некоторых вполне непрерывных операторов.— «Вестник ЛГУ. Серия математика, механика, астрономия», 1965, № 7, с. 68—77.

45. **Никольский Н. К.** Базисность и одноклеточность операторов взвешенного сдвига.— «Изв. АН СССР. Серия мат.», 1968, т. 32, № 5, с. 1123—1137.
46. **Никольский Н. К.** Нестандартные идеалы, одноклеточность и алгебры, связанные с оператором сдвига.— В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 19. Л., 1970, с. 156—195.
47. **Никольский Н. К.** Спектральный синтез для оператора сдвига и нули в некоторых классах аналитических функций, гладких вплоть до границы.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 190, № 4, с. 780—783.
48. **Kerlin J. E., Lambert A. L.** Strictly cyclic shifts on l^p.—„Acta scien. math.", 1973, v. 35, p. 87—94.
49. **Никольский Н. К.** Одноклеточность и неодноклеточность взвешенных операторов сдвига.— «Докл. АН СССР», 1967, т. 172, № 2, с. 287—290.
50. **Shields A. L.** Weighted shift operators and analytic function theory.— "Top. Oper. Theory", Providence, R. I., 1974, p. 49—128.
51. **Caradus S. R.** Invariant subspaces of operators related to the unilateral shift.—"J. Austral. Math. Soc.", 1973, v. 16, N 2, p. 210—213.
52. **Murphy I. S.** The centraliser of a weighted shift on l^1.— "J. London Math. Soc.", 1974, v. 8, N 2, p. 438—442.
53. **Fillmore P. A.** The shift operator.— "Amer. Math. Monthly", 1974, v. 81, N 7, p. 717—723.
54. **Gellar R.** A generalization of weighted shifts.— "Indiana Univ. Math. J.", 1974, v. 24, N 3, p. 259—264.
55. **Grabiner S.** Weighted shifts and Banach algebras of power series.— "Amer. J. Math.", 1975, v. 97, N 1, p. 16—42.
56. **Loy R. J.** Banach algebras of power series.—"J. Austral. Math. Soc.", 1974, v. 17, N 3, p. 263—273.
57. **Helson H.** Invariant subspaces of the weighted shift.— In: Hilbert Space Operators. Operator Algebras. Budapest. Colloquia math. Soc. János Bolyai. 1972, p. 271—277.
58. **Леонтьева Т. А.** Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций.— «Мат. заметки», 1968, т. 4, № 2, с. 191—200.
59. **Douglas R. G., Shapiro H. S., Shields A. L.** On cyclic vectors of the backward shift.—"Bull. Amer. Math. Soc.", 1967, v. 73, N 1.
60. **Никольский Н. К.** Лекции об операторе сдвига. I.— В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 39. Л., 1974, с. 59—93.
61. **Hilden H. M., Wallen L. J.** Some cyclic and non — cyclic vectors of certain operators.—"Indiana Univ. Math. J.", 1974, v. 23, N 7.
62. **Glaeser G.** Synthèse spectrale des ideaux de fonctions lipschitziennes.—"C. r. Acad. Sci. Paris", 1965, v. 260, N 6, p. 1539—1542.
63. **Васюнин В. И.** Базисы из собственных подпространств и неклассическая интерполяция.— «Функциональный анализ и его приложения», 1975, т. 9, № 4, с. 65—66.
64. **Byrnes J. S., Newman D. J.** Completeness preserving multipliers.— "Proc. Amer. Math. Soc.", 1969, v. 21, N 2, p. 445—450.
65. **Никольская Л. Н.** Геометрические свойства систем собственных векторов и точечных спектров линейных операторов.— «Функциональный анализ и его приложения», 1970, т. 4, № 3.
66. **Никольская Л. Н.** Геометрические свойства систем собственных векторов и точечных спектров линейных операторов.— ЛГПИ, 1972, с. 57—59.

ОПЕРАТОРЫ ТИПА RN И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

О. И. Рейнов

В этой работе изучаются свойства операторов типа RN, связанные с аналитическими представлениями линейных операторов, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками измеримых функций. Приводятся характеристики операторов типа RN в терминах правильных и суммирующих операторов В. Левина [2]. Основные результаты работы анонсированы в [4].

Автор благодарен Б. М. Макарову за полезные замечания и за помощь при подготовке работы к печати.

§ 1. Определение и простейшие свойства операторов типа RN

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной положительной мерой, X, Y — банаховы пространства, $L(X, Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в Y, $L^p(\Omega, \mu; X)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — пространство измеримых по Бохнеру X-значных функций $\bar{f}$, для которых $\|\bar{f}\|_X \in L^p(\Omega, \mu)$. Если $\bar{m}: \Sigma \to X$ — мера со значениями в пространстве X, то через $V(\bar{m})$ мы будем обозначать вариацию меры $\bar{m}$ и писать $\bar{m} = \bar{f}\mu$, если $\bar{m}(A) = \int\limits_A \bar{f}\, d\mu$ для $A \in \Sigma$, где $\bar{f} \in L^1(\Omega, \mu; X)$ (в этом случае говорят, что мера $\bar{m}$ имеет производную относительно меры μ).

Определение 1. Оператор $T \in L(X, Y)$ называется *оператором типа RN*, если он всякую X-значную меру $\bar{m}$ ограниченной вариации переводит в Y-значную меру, имеющую производную относительно вариации меры $\bar{m}$.

Пространство всех операторов типа RN, действующих из X в Y, мы обозначим через $RN(X, Y)$. Нетрудно видеть, что класс $RN=\{RN(X, Y):X, Y$ — банаховы пространства$\}$ с обычной операторной нормой является нормированным идеалом операторов в смысле А. Пича [6].

Замечание. Если тождественное отображение $\mathrm{id}:X\to X$ является оператором типа RN, то говорят, что *пространство X обладает свойством Радона — Никодима RN*. Рефлексивные и сепарабельные сопряженные пространства обладают свойством RN [8]. В нашей работе мы опирались лишь на тот факт, что пространство $l^1(\Gamma)$ абсолютно суммируемых семейств $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ также обладает свойством RN [8].

Из [7, следствие к теореме 1] и теоремы Халмоша и Дж. фон Неймана [5, с. 170] вытекает

Предложение 1. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной положительной не чисто атомической мерой, $T\in L(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T\in RN(X, Y)$;

2) *Если $\bar{m}:\Sigma\to X$ — μ-абсолютно непрерывная мера ограниченной вариации, то $T\bar{m}=\bar{f}\mu$, где $\bar{f}\in L^1(\Omega, \mu; X)$;*

3) *если $\bar{m}$ — абсолютно непрерывная относительно меры Лебега μ_0 на отрезке $[0, 1]$ X-значная мера, то $T\bar{m}=\bar{f}\mu_0$, где $\bar{f}\in L^1([0, 1], \mu_0; Y)$.*

Предложение 2. *Всякий слабо компактный оператор является оператором типа RN.*

Доказательство. Пусть $T:X\to Y$ — слабо компактный оператор, $\bar{m}:\Sigma\to X$ — мера ограниченной вариации. Рассмотрим оператор $U:L^1(\Omega, V(\bar{m}))\to X$, определенный следующим образом:

$$Uf=\int f d\bar{m}, \quad f\in L^1(\Omega, V(\bar{m})).$$

Так как TU — слабо компактное отображение из $L^1(\Omega, V(\bar{m}))$ в Y, то по теореме Данфорда — Филлипса — Петтиса [10, с. 89] существует такая функция $\bar{g}\in L^\infty(\Omega, V(\bar{m}), Y)$, что $TUf=\int f\bar{g}dV(\bar{m})$ для всех $f\in L^1(\Omega, V(\bar{m}))$. Следовательно, для любой функции $\varphi\in L^\infty(\Omega, V(\bar{m}))$ имеем $\int \varphi dT\bar{m}=TU\varphi=\int \varphi\bar{g}dV(\bar{m})$. Поэтому $T\bar{m}=\bar{g}V(\bar{m})$, причем ясно, что $\bar{g}\in L^1(\Omega, V(\bar{m}); Y)$.

Предложение 3. *Пусть* $T \in L(L^1(\Omega, \mu), X)$. *Равносильны следующие условия:*

1) T *есть оператор типа* RN;

2) *существует такая функция* $\bar{f} \in L^\infty(\Omega, \mu; X)$, *что* $Tf = \int f\bar{f}d\mu$, $f \in L^1(\Omega, \mu)$;

3) *существует множество* Γ *и операторы* $U \in L(L^1(\Omega, \mu), l^1(\Gamma))$ *и* $\Phi \in L(l^1(\Gamma), X)$ *такие, что* $T = \Phi U$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $T \in RN(L^1(\Omega, \mu), X)$. Определим меру $\bar{m}: \Sigma \to L^1(\Omega, \mu)$ следующим образом: $\bar{m}(A) = \chi_A$ для $A \in \Sigma$, где χ_A — характеристическая функция множества A. Очевидно, $V(\bar{m}) = \mu$. Пусть id — тождественное отображение пространства $L^1(\Omega, \mu)$ на себя. Тогда $\mathrm{id}f = \int f d\bar{m}$ для $f \in L^1(\Omega, \mu)$. Следовательно,

$$Tf = T\mathrm{id}f = T\left(\int f d\bar{m}\right) = \int f dT\bar{m} \quad (f \in L^1(\Omega, \mu)).$$

Так как $T \in RN(L^1(\Omega, \mu), X)$, то существует элемент $\bar{f} \in L^1(\Omega, \mu; X)$ такой, что $T\bar{m} = \bar{f}\mu$. Кроме того, для всех $f \in L^1(\Omega, \mu)$ имеем

$$\int |f| \|\bar{f}\| d\mu = \int |f| dV(T\bar{m}) \leqslant \|T\| \int |f| dV(\bar{m}) =$$

$$= \|T\| \int |f| d\mu = \|T\| \|f\|_1.$$

Следовательно, $\|\bar{f}\| \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Наконец, для всех $f \in L^1(\Omega, \mu)$ имеет место равенство $Tf = \int f\bar{f}d\mu$.

2) $\Rightarrow$ 3). Хорошо известно, что найдутся множество Γ и замкнутое подпространство Z пространства $l^1(\Gamma)$ такие, что $X = l^1(\Gamma)/Z$. Пусть $\Phi: l^1(\Gamma) \to X$ — фактор-отображения и $\Delta: X \to l^1(\Gamma)$ — такое непрерывное (не обязательно линейное) отображение, что $\Phi\Delta$ — тождественный оператор (существование такого отображения установлено в [12]). Рассмотрим линейный непрерывный оператор $U: L^1(\Omega, \mu) \to l^1(\Gamma)$, определенный следующим образом: $Uf = \int f\Delta\bar{f}d\mu$ $(f \in L^1(\Omega, \mu))$. Очевидно, что $T = \Phi U$.

Для доказательства импликации 3) $\Rightarrow$ 1) достаточно заметить, что пространство $l^1(\Gamma)$ обладает свойством RN [8].

§ 2. Операторы в пространствах измеримых функций

В этом параграфе (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной положительной не чисто атомической мерой; X, Y — банаховы пространства. Говоря о полуупорядоченных пространствах, мы будем придерживаться терминологии монографии [1].

Векторнозначная функция $\bar{f}:\Omega \to X^*$ называется *X-скалярно измеримой* [9], если для каждого $x \in X$ измерима скалярная функция $\langle x, \bar{f}\rangle$. X-скалярно измеримые X^*-значные функции $\bar{f}$ и $\bar{g}$ называются X-скалярно эквивалентными, если для любого $x \in X$ почти всюду (п. в.) на Ω имеет место равенство $\langle \bar{f}, x\rangle = \langle \bar{g}, x\rangle$.

Буквой E везде далее обозначается некоторый фундамент в K-пространстве $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых п. в. конечных на Ω функций, являющийся одновременно банаховым KN-пространством (такие пространства мы будем называть *KN-фундаментами*).

Введем еще некоторые обозначения. Пусть

1) E' — дуальное к E пространство, т. е.

$$E' = \left\{g \in S(\Omega, \Sigma, \mu) : \int |gf|\, d\mu < \infty \quad (f \in E)\right\};$$

2) $E(X)$ — пространство измеримых по Бохнеру X-значных функций $\bar{f}$, для которых $\|\bar{f}\|_X \in E$;

3) $P(X, E) \subset L(X, E)$ — пространство правильных операторов [2], т. е. операторов, переводящих единичный шар пространства X в порядково ограниченное множество в E;

4) $S(E, X) \subset L(E, X)$ — пространство суммирующих операторов [2], т. е. операторов T, для которых существует такой элемент $e'(T) \in E^*$, что $\|Te\| \leqslant \langle |e|, e'(T)\rangle$ для всех $e \in E$;

5) $P_0(X, E) \subset L(X, E)$ — пространство операторов T, допускающих представление $T = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cdot, x_n'\rangle e_n$, где $x_n' \in X^*$, $e_n \in E$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n'\| |e_n|$ сходится в E;

6) $\bar{S}(E, X) \subset L(E, X)$ — пространство операторов T, для которых существует такая функция $e'(T) \in E'$, что $\|Te\| \leqslant \int |e| e'(T)\, d\mu$ для всех $e \in E$;

7) $N_p(X, Y) \subset L(X, Y)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство *p-ядерных* операторов [11], т. е. операторов $T: X \to Y$, которые факторизуются следующим образом $X \xrightarrow{U_1} l^\infty \xrightarrow{\Delta} l^p \xrightarrow{U_2} Y$, где U_1 и U_2 — непрерывные линейные операторы, Δ — оператор умножения на последовательность $\{\xi_i\} \in l^p$;

8) $J_p(X, Y) \subset L(X, Y)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство *p-интегральных операторов* [11], т. е. операторов $T: X \to Y$, которые факторизуются следующим образом: $X \xrightarrow{U_1} C(K) \xrightarrow{i} L^p(K, \nu) \xrightarrow{U_2} Y$, где K — отделимый компакт, ν — положительная конечная мера Радона на K, i — тождественное вложение, U_1 и U_2 — непрерывные линейные операторы.

Определение 2. Оператор $T \in L(X, Y)$ называется *оператором типа* $RN_{E'}$, если он всякую X-значную меру $\overline{m}: \Sigma \to X$ ограниченной вариации, для которой существует такая функция $g \in E'$, что $\int |f|\, dV(\overline{m}) \leqslant \int |f|\, g\, d\mu$ для всех $f \in E$, переводит в меру $T\overline{m}$, для которой существует такая Y-значная функция $\overline{g} \in E'(Y)$, что $\int f\, dT\overline{m} = \int f \overline{g}\, d\mu$ для всех $f \in E$.

Множество всех операторов типа $RN_{E'}$, действующих из X в Y, обозначим через $RN_{E'}(X, Y)$. Очевидно, что если $E = L^\infty(\Omega, \mu)$, то $RN_{E'}(X, Y) = RN(X, Y)$. Доказательство следующей простой леммы мы опускаем.

Лемма 1. *Пусть* E, F — *KN-фундаменты в* $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ *и* $L^\infty \subset F \subset E \subset L^1$. Тогда $RN_{F'}(X, Y) \subset RN_{E'}(X, Y)$.

Лемма 2. *Пусть* E — *KN-фундамент в* $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ *и* $L^\infty \subset E \subset L^1$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T \in RN_{E'}(X, Y)$;

2) *для всякого оператора* $U \in \overline{S}(E, X)$ $\left(\|Ue\| \leqq \int |e|\, g\, d\mu\right.$ *для всех* $e \in E$, *где* $\left. g \in E'\right)$ *существует такая функция* $\overline{g} \in E'(Y)$, *что* $\|\overline{g}\| \leqslant \|T\| g$ *п. в. и* $TUf = \int f \overline{g}\, d\mu$ $(f \in E)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $U \in \overline{S}(E, X)$, т. е. $U \in L(E, X)$ и существует такая функция $g \in E'$, что $\|Uf\| \leqslant \int |f|\, g\, d\mu$ для всех $f \in E$. Положим $\overline{m}(A) = U\chi_A$ (χ_A — характеристическая функция множества $A \in \Sigma$) и $\mu_0 = g\mu$. Тогда $\overline{m}: \Sigma \to X$ — мера, причем $V(\overline{m})(A) \leqslant \mu_0(A)$ для всех $A \in \Sigma$. Нетрудно видеть, что

$Uf=\int fd\bar{m}$ для любой функции $f\in E$. Так как $\int|f|dV(\bar{m})\leqslant$ $\leqslant\int|f|gd\mu$ для всех $f\in E$, то по условию существует такая функция $\bar{g}\in E'(Y)$, что $\int fdT\bar{m}=\int f\bar{g}d\mu$ $(f\in E)$. Ясно, что $TUf=\int f\bar{g}d\mu$ для всех $f\in E$. Покажем, что $\|\bar{g}\|\leqslant$ $\leqslant\|T\|g$ п. в. Действительно, для произвольных $f_0\in E$, $f_0>0$, и $y'\in Y^*$, $\|y'\|\leqslant 1$, имеем

$$\int f_0|\langle\bar{g},y'\rangle|d\mu=\sup_{|f|\leqslant f_0}\left|\int f\langle\bar{g},y'\rangle d\mu\right|=$$
$$=\sup_{|f|\leqslant|f_0|}\left|\left\langle\int f\bar{g}d\mu,y'\right\rangle\right|=$$
$$=\sup_{|f|\leqslant f_0}|\langle Uf,T^*y'\rangle|\leqslant\|T\|\sup_{|f|\leqslant f_0}\int|f|gd\mu=\|T\|\int f_0gd\mu.$$

Следовательно, для любого $y'\in Y^*$, $\|y'\|\leqslant 1$, п. в. на Ω имеет место неравенство $|\langle\bar{g},y'\rangle|\leqslant\|T\|g$. Так как функция $\bar{g}$ измерима по Бохнеру, то $\|\bar{g}\|\leqslant g\|T\|$ п. в.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\bar{m}:\Sigma\to X$ — мера со значениями в X, для которой существует такая функция $g\in E'$, что $\int|f|dV(\bar{m})\leqslant\int|f|gd\mu$ $(f\in E)$. Рассмотрим оператор $U:E\to X$, $Uf=\int fd\bar{m}$ $(f\in E)$. Ясно, что $U\in\bar{S}(E,X)$. Поэтому найдется такой элемент $\bar{g}\in E'(Y)$, что $TUf=\int f\bar{g}d\mu$ для всех $f\in E$. Так как $TUf=\int fdT\bar{m}$, то $\int fdTm=\int f\bar{g}d\mu$ для $f\in E$.

Теорема 1. *Пусть $T\in L(X,Y)$, E — KN-фундамент в $S(\Omega,\Sigma,\mu)$, удовлетворяющий условию (A)*[1]*. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$T\in RN(X,Y)$;*

2) *для каждого оператора $U\in\bar{S}(E,X)$ существует такая функция $\bar{g}\in E^*(Y)$, что $TUe=\int e\bar{g}d\mu$ для всех $e\in E$;*

3) *для каждого оператора $U\in L(L^1,X)$ существует такая функция $\bar{g}\in L^\infty(Y)$, что $TUe=\int e\bar{g}d\mu$ для всех $e\in L^1$;*

---

[1] Напомним, что E удовлетворяет условию (A), если всякая последовательность элементов $e_n\in E$, $e_n>0$, такая, что $e_n\downarrow 0$, сходится к нулю по норме. Заметим, что в силу условия (A) элементами E^* служат измеримые функции.

4) *для каждого оператора* $U \in \bar{S}(L^\infty, X)$ *существует такая функция* $\bar{g} \in L^1(Y)$, *что* $TUe = \int e\bar{g}d\mu$ *для всех* $e \in L^\infty$.

Доказательство. Известно, что если E — фундамент в $S(\Omega, \Sigma, \mu)$, который является одновременно банаховым KN-пространством, то существует такая измеримая функция u, что $L^\infty \subset uE \subset L^1$ [3]. Поэтому мы можем с самого начала считать, что $L^\infty \subset E \subset L^1$. Тогда ясно, что

1) $\Leftrightarrow$ 4) по лемме 2;

1) $\Rightarrow$ 2) по леммам 1 и 2, поскольку из условия (A) вытекает, что $E^* = E'$;

2) $\Rightarrow$ 3) по леммам 1 и 2.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть $U \in \bar{S}(L^\infty, X)$ и $g \in L^1$ — такая функция, что $\|Uf\| \leqslant \int |f| g d\mu$ для $f \in L^\infty$. Не умаляя общности, можно считать, что $g \geqslant 1$ п. в. Определим оператор $U_1 : L^\infty \to L^1$ следующим образом: $U_1 f = gf$ $(f \in L^\infty)$. Тогда множество $U_1(L^\infty)$ плотно в L^1. Пусть $V : L^1 \to X$ — продолжение по непрерывности оператора $V_0 : U_1(L^\infty) \to X$, $V_0(gf) = Uf$ для $f \in L^\infty$. Ясно, что $Uf = VU_1 f$ $(f \in L^\infty)$. По условию существует такая функция $\bar{g}_0 \in L^\infty(Y)$, что $TV\varphi = \int \varphi \bar{g}_0 d\mu$ $(\varphi \in L^1)$. Следовательно, если $f \in L^\infty$, то $TUf = TVU_1 f = TV(gf) = \int gf\bar{g}_0 d\mu$.

Положим $\bar{g} = g\bar{g}_0$. Тогда $\|\bar{g}\| = g\|\bar{g}_0\| \in L^1$, т. е. $\bar{g} \in L^1(Y)$. Кроме того, $TUf = \int f\bar{g}d\mu$ для всех $f \in L^\infty$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* E — KN-*фундамент в* $S(\Omega, \Sigma, \mu)$, *удовлетворяющий условию* (A), *и* $L^\infty \subset E \subset L^1$. *Тогда* $RN(X, Y) = RN_{E'}(X, Y)$.

Теорема 2. *Пусть* E — KN-*фундамент в* $S(\Omega, \Sigma, \mu)$, *удовлетворяющий условию* (A), *и* $T \in L(X, Y)$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T^* \in RN(Y^*, X^*)$;

2) *для каждого оператора* $U \in P(Y, E)$ *существует такая функция* $\bar{g} \in E(X^*)$, *что* $UTx = \langle x, \bar{g} \rangle$ *для всех* $x \in X$;

3) *для каждого оператора* $U \in P(Y, E)$ *оператор* UT *приближается конечномерными операторами в пространстве* $P(X, E)$;

4) *для каждого оператора* $U \in P(Y, E)$ *имеет место включение* $UT \in P_0(X, E)$.

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, мы можем считать, что $L^\infty \subset E \subset L^1$.

Эквивалентность условий 2, 3 и 4 дает следующая лемма, простое доказательство которой мы опускаем.

Лемма 3. *Пусть* $V \in L(X, E)$. *Равносильны следующие утверждения:*

а) *существует такая функция* $\bar{g} \in E(X^*)$, *что* $Vx = \langle x, \bar{g}\rangle$ *для всех* $x \in X$;

б) *оператор* V *приближается конечномерными операторами в пространстве* $P(X, E)$;

в) $V \in P_0(X, E)$.

Докажем эквивалентность условий 1 и 2.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $U \in P(Y, E)$, т. е. $U \in L(Y, E)$, и существует такая функция $\gamma \in E$, что $|Uy| \leqslant \|y\|\gamma$ для всех $y \in Y$. Тогда

$$\sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle U^*e', y\rangle| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle e', Uy\rangle| \leqslant \sup_{\|y\| \leqslant 1} \langle |e'|, \|y\|\gamma\rangle = \int |e'|\gamma d\mu,$$

т. е $\|U^*e'\| \leqslant \int |e'| \gamma d\mu$ $(e' \in E^*)$. Следовательно, по лемме 2 (примененной к U^*), существует такая функция $\bar{g} \in (E^*)'(X^*)$, что $\|\bar{g}\| \leqslant \|T\|\gamma$ и $T^*U^*e' = \int e'\bar{g} d\mu$ для всех $e' \in E^*$. Так как E нормально содержится в $S(\Omega, \Sigma, \mu)$, а $\gamma \in E$, то $\|\bar{g}\| \in E$. Поэтому $\bar{g} \in E(X^*)$. Кроме того, $UTx = \langle x, \bar{g}\rangle$ для всех $x \in X$.

2) $\Rightarrow$ 1). Докажем, что $T^* \in RN_{L^\infty}$. Пусть $\bar{m}: \Sigma \to Y^*$ — такая мера, что $\int |f| dV(\bar{m}) \leqslant \int |f| g d\mu$ $(f \in L^1)$, где g — некоторая функция из L^∞. Эта мера порождает линейный непрерывный оператор $S: L^1 \to Y^*$, который можно рассматривать как оператор из E^* в Y^*, так как $E^* \subset L^1$. При этом для всякой функции $f \in E^*$ имеет место неравенство $\|Sf\| \leqslant \int |f| dV(\bar{m}) \leqslant \int |f| g d\mu$. Рассмотрим оператор $S^*: Y^{**} \to E^{**}$. Так как $\|Sf\| \leqslant \int |f| g d\mu$ $(f \in E^*)$, то $|S^*y''| \leqslant \|y''\| g$ для всех $y'' \in Y^{**}$. Ввиду того, что E обладает свойством (A), E нормально содержится в E^{**} [1]. Следовательно, $S^*(Y^{**}) \subset E$. Рассмотрим теперь отображение $U = S^*|_Y: Y \to E$. Очевидно, что $U^* = S$ и $U \in P(Y, E)$. По условию существует такая функция $\bar{g} \in E(X^*)$, что $UTx = \langle x, \bar{g}\rangle$ для $x \in X$. Поэтому

$T^*U^*f' = \int f\bar{g}d\mu$ для всех $f \in E^*$. Следовательно, $\int f\bar{g}d\mu = \int f dT^*\bar{m}$ для $f \in E^*$. Нетрудно проверить, что $\|\bar{g}\| \in L^\infty$ и $T^*\bar{m} = \bar{g}\mu$. Таким образом, $T^* \in RN_{L^\infty}$. По следствию к теореме 1 оператор T^* является оператором типа RN.

Следствие. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $T \in L(X, Y)$. Если T^* — оператор типа RN, то для всякого банахова пространства Z и любого оператора $U \in J_p(Y, Z)$ оператор UT принадлежит пространству $N_p(X, Z)$.*

Доказательство. Пусть $U \in J_p(Y, Z)$. Тогда U факторизуется следующим образом:

$$U: Y \xrightarrow{V} C(K) \xrightarrow{i} L^p(K, \nu) \xrightarrow{W} Z,$$

где K — отделимый компакт, ν — положительная конечная мера Радона на K, i — тождественное вложение, V и W — непрерывные операторы. Очевидно, что $iV \in P(Y, L^p)$. По теореме 2 найдется такая функция $\bar{g} \in L^p(X^*)$, что $iVTx = \langle x, \bar{g}\rangle$ для всех $x \in X$. Согласно [13, теорема 1] $iVT \in N_p(X, L^p)$. Следовательно, $UT \in N_p(X, Z)$.

Замечание. В случаях, когда оператор T слабо компактен или пространство X^* сепарабельно, следствие из теоремы 2 получено при $p=1$ в [9], а при произвольном $p \in [1, \infty)$ в [13].

Теорема 3. *Пусть $T \in L(X, Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T^* \in RN(Y^*, X^*)$;

2) *для всякой ограниченной Y-скалярно измеримой функции $\bar{f}: \Omega \to Y^*$ существует такая ограниченная измеримая по Бохнеру функция $\bar{g}: \Omega \to X^*$, что $T^*\bar{f}$ X-скалярно эквивалентна функции $\bar{g}$;*

3) *для всякой Y-скалярно измеримой функции $\bar{f}: \Omega \to Y^*$ существует такая измеримая по Бохнеру функция $\bar{g}: \Omega \to X^*$, что $T^*\bar{f}$ X-скалярно эквивалентна функции $\bar{g}$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $T^* \in RN$ и функция $\bar{f}: \Omega \to Y^*$ — Y-скалярно измерима и ограничена, $\|\bar{f}\| \leqslant c$ п. в. Определим меру $\bar{m}: \Sigma \to Y^*$ следующим образом: $\bar{m}(A) = \int_A \bar{f}d\mu$ $(A \in \Sigma)$. Ясно, что это определение корректно, так как для $A \in \Sigma$ и $y \in Y$ мы имеем

$$|\langle \bar{m}(A), y \rangle| = \left| \left\langle \int_A \bar{f} d\mu, y \right\rangle \right| = \left| \int \langle \bar{f}, y \rangle \, d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |\langle \bar{f}, y \rangle| \, d\mu \leqslant c \|y\| \int_A d\mu = c \|y\| \mu(A)$$

и, следовательно, $\bar{m}(A) \in Y^*$. Очевидно, что $V(\bar{m})(A) \leqslant \leqslant c\mu(A)$ для всех $A \in \Sigma$. Пусть $\varphi \in L^1$. Тогда $\int |\varphi| \, dV(T^*\bar{m}) \leqslant c \|T\| \|\varphi\|_1$. По условию $T^*\bar{m}(A) = \int_A \bar{g} d\mu$ для всех $A \in \Sigma$, где $\bar{g}$ — измеримая по Бохнеру X^*-значная функция. Следовательно, $\int |\varphi| \|\bar{g}\| d\mu = \int |\varphi| \, dV(T^*\bar{m}) \leqslant c \|T\| \|\varphi\|_1$ для любой функции $\varphi \in L^1$. Таким образом, $\|\bar{g}\| \in L^\infty$. Далее, $\int_A T^*\bar{f} d\mu = T^*\bar{m}(A) = \int_A \bar{g} d\mu$ $(A \in \Sigma)$. Отсюда следует, что $\langle T^*\bar{f}, x \rangle = \langle \bar{g}, x \rangle$ п. в. для каждого фиксированного $x \in X$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\bar{f}$ — произвольная Y-скалярно измеримая п. в. конечная функция, $\bar{f}: \Omega \to Y^*$. Положим

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \leqslant n\} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $F = \sup\{|\langle \bar{f}, x \rangle| : \|x\| \leqslant 1\}$. Пусть $\Sigma_n = \Sigma|_{\Omega_n}$. Очевидно, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ есть множество полной меры. По условию существуют такие функции $\bar{g}_n \in L^\infty(X^*)$, что $T^*\bar{f}$ X-скалярно эквивалентна функции $\bar{g}_n$ на Ω_n. Пусть $\sigma_n = \Omega_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \Omega_k$ и $\bar{g}: \Omega \to X^*$ — функция, равная $\bar{g}_n$ на σ_n и нулю вне $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k$. Тогда, очевидно, функция $\bar{g}$ измерима и X-скалярно эквивалентна функции $T^*\bar{f}$.

3) $\Rightarrow$ 1). Покажем, что $T^* \in RN_{L^p}$ при $1 < p < \infty$. Пусть $q = p/(p-1)$ и $\bar{m}: \Sigma \to Y^*$ — такая мера, что для всех $\varphi \in L^q$ имеет место неравенство $\int |\varphi| \, dV(\bar{m}) \leqslant \int |\varphi| \gamma d\mu$, где γ — некоторая функция из L^p. Рассмотрим оператор $U: L^q \to Y^*$, $U\varphi = \int \varphi d\bar{m}$ $(\varphi \in L^q)$. Очевидно, $U \in S(L^q, Y^*)$. Пусть $V = U^*|_Y : Y \to L^p$. Нетрудно видеть, что $U = V^*$. Так как $U^* \in P(Y^{**}, L^p)$, то $V \in P(Y, L^p)$. Отсюда, используя теорему о лифтинге [10, с. 46, теорема 3], мы полу-

чаем, что существует такая Y-скалярно измеримая функция $\Phi:\Omega \mapsto Y^*$, что $\|\Phi\| \leqslant \Psi \in L^p$ и $Vy = \langle y, \Phi\rangle$ $(y \in Y)$. Поэтому $U\varphi = V^*\varphi = \int \varphi \Phi d\mu$ для $\varphi \in L^q$, т. е. $\int \varphi d\bar{m} = \int \varphi \Phi d\mu$ для всех $\varphi \in L^q$. Рассмотрим функцию $T^*\Phi$. По условию найдется измеримая по Бохнеру функция $\bar{g}:\Omega \to X^*$, X-скалярно эквивалентная функции $T^*\Phi$. Следовательно, $\int \varphi dT^*\bar{m} = T^*U\varphi = \int \varphi T^*\Phi d\mu = \int \varphi \bar{g} d\mu$ для всех $\varphi \in L^q$. Очевидно, что $\|\bar{g}\| \leqslant \|T\| \psi \in L^p$. Поэтому $\bar{g} \in L^p(X^*)$. Таким образом, $T^* \in RN_{L^p}$. По следствию из теоремы 1 $T^* \in RN$. Теорема доказана.

Пусть теперь K — отделимый компакт, $\mathfrak{B}(K)$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства K, ν — конечная положительная мера Радона на K. Нам понадобится следующее определение, введенное в [9]: множество $A \subset S(K, \mathfrak{B}(K), \nu)$ называется *равностепенно измеримым,* если для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset K$ и множество A_ε равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных (в смысле равномерной структуры) на K_ε функций такие, что $\nu(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ и для всякой функции $f \in A$ найдется функция $f_0 \in A_\varepsilon$, равная f п. в. на K_ε.

Определение 3. Пусть $B \subset X$ — ограниченное множество в пространстве X. Множество B будем называть *измеримым в себе,* если для всякого отделимого компакта K, любой меры Радона ν на K, любого KN-фундамента $F \subset S(K, \mathfrak{B}(K), \nu)$, удовлетворяющего условию (A), и всякого оператора $T \in P(X, F)$ множество TB является измеримым.

Лемма 4. *Пусть E — KN-фундамент в $S(K, \mathfrak{B}(K), \nu)$, удовлетворяющий условию (A), $T \in L(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует такая функция $\bar{f} \in E(X^*)$, что $Tx = \langle x, \bar{f}\rangle$ для всех $x \in X$;*

2) *T переводит единичный шар пространства X в равностепенно измеримое и порядково ограниченное в E множество.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $Tx = \langle x, \bar{f}\rangle$ для $x \in X$, где $\bar{f}$ — некоторый элемент пространства $E(X^*)$. Так как $\bar{f}:K \to X^*$ — измеримая функция, то найдутся такие компакты $K_n \subset K$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\nu\left(K \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n\right) = 0$ и на каждом K_n функция $\bar{f}$ непрерывна. Не умаляя общности, можно считать, что носитель меры $\nu|_{K_n}$ есть весь компакт K_n. Пусть $\mathscr{D}$ — единичный шар в X. Так как $|\langle x, \bar{f}\rangle| \leqslant \|\bar{f}\|$ для всех $x \in \mathscr{D}$, то множество $T\mathscr{D}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на K_n для любого $n=1, 2, \ldots$, т. е. множество $T\mathscr{D}$ равностепенно измеримо. Очевидно, что множество $T\mathscr{D}$ порядково ограничено в E.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть множество $T\mathscr{D}$ порядково ограничено и равностепенно измеримо. Тогда можно найти такие компакты $K_n \subset K$, $K_n \subset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что п. в. на $K \diagdown \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ функция $\gamma = \sup |T\mathscr{D}| \in E$ равна нулю и на K_n множество $T\mathscr{D}$ совпадает с равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным семейством A_n непрерывных на K_n функций. Не умаляя общности, можно считать, что носитель меры $\nu|_{K_n}$ равен K_n и для всякого $n=1, 2, \ldots$ имеет место равенство $A_n = (TD)|_{K_n}$. Рассмотрим отображения $T_n : X \to C(K_n)$, $T_n x = (Tx)|_{K_n}$ $(n=1,2,\ldots)$. Очевидно, что отображения T_n непрерывны для всех $n=1,2,\ldots$ Более того, они вполне непрерывны.

Определим функцию $\bar{f}_n : K_n \to X^*$ следующим образом: если $k \in K_n$, $x \in X$, то $\langle x, \bar{f}_n(k)\rangle = (T_n x)(k)$. Так как множество A_n равностепенно непрерывно, то функция $\bar{f}_n$ непрерывна на K_n. Очевидно, что $\bar{f}_{n+1}|_{K_n} = \bar{f}_n$. Пусть $\bar{f} : K \to X^*$ — функция, равная $\bar{f}_n$ на K_n и нулю на $K \diagdown \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. По построению функция $\bar{f}$ является сильно измеримой и, кроме того, $\|\bar{f}(k)\| \leqslant \gamma(k)$ для каждого $k \in K$. Следовательно, $\|\bar{f}\| \in E$, т. е. $\bar{f} \in E(X^*)$. Наконец ясно, что $Tx = \langle x, \bar{f}\rangle$. Лемма доказана.

Используя лемму 4 и теорему 2, мы получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $T \in L(X, Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T^* \in RN(Y^*, X^*)$;

2) *оператор T переводит единичный шар пространства X в множество, измеримое в себе.*

Следствие. *Пространство X^* обладает свойством RN тогда и только тогда, когда единичный шар пространства X является измеримым в себе множеством.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961. 407 с.
2. **Левин В. Л.** К двойственности некоторых классов линейных операторов, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками.— «Сиб. мат. журн.», 1973, т. 14, № 3, с. 599—608.
3. **Лозановский Г. Я.** О некоторых банаховых структурах.— «Сиб. мат. журн.», 1969, т. 10, № 3, с. 584—599.
4. **Рейнов О. И.** Операторы типа *RN* в банаховых пространствах.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 220, № 3, с. 528—531.
5. **Халмош П.** Теория меры. М., ИЛ., 1953. 291 с.
6. **Pietsch A.** Theorie der operatorenideale (Zusammenfassung). Jena, 1972. 260 p.
7. **Chatterji S. D.** Martingale convergence and the Radon — Nikodym theorem in Banach spaces.— "Math. Scand.", 1968, v. 22, p. 21—41.
8. **Uhl J. J. Jr.** A note on the Radon — Nikodym property in Banach spaces.—"Rev. roumaine math. pures et appl.", 1972, v. 14, N 1, p. 113—115.
9. **Grothendieck A.** Produits tensoriels topologiquets et espaces nucléaires.— "Mem. Amer. Math. Soc.", 1955, v. 16. 140 p.
10. **Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.** Topics in the theory of lifting. Springer, Berlin — Heidenberg — New York, 1969. 189 p.
11. **Persson A., Pietsch A.** p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen.— "Studia math.", 1969, v. 33, p. 19—62.
12. **Michael E.** Continuous selections.—"Ann. of Math.", 1956, v. 63, p. 361—382.
13. **Persson A.** On some properties of p-nuclear and p-integral operators.— "Studia math.", 1969, v. 33, p. 213—222.

СУПРЕМАЛЬНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. В. Рутковский

1. Рассмотрим упорядоченное векторное пространство E (сокращенно у. в. п. E) с воспроизводящим конусом E_+ положительных элементов.

Определение (см. [1]). Подпространство H у. в. п. E называется *супремальным генератором* пространства E, если для каждого элемента $x \in E$ имеют место соотношения

$$U_x = \{h \in H : h \leqslant x\} \neq \varnothing, \quad x = \sup U_x. \tag{1}$$

Подпространство H, удовлетворяющее первому из условий (1), называется *минорантным*. Во втором равенстве считается, что множество U_x обладает верхней гранью в пространстве E и эта грань совпадает с x. Заметим, что для супремального генератора H у. в. п. E и элемента $x \in E$ справедливы соотношения

$$V_x = \{h \in H : h \geqslant x\} \neq \varnothing, \; x = \inf V_x. \tag{2}$$

Будем говорить, что у. в. п. F является *расширением* у. в. п. E, если в F существует супремальный генератор E', изоморфный у. в. п. E (имеется в виду линейный и порядковый изоморфизм). У. в. п. E назовем *максимальным*, если любое расширение F, содержащее E в качестве супремального генератора, совпадает с E.

Теорема 1. *Для каждого у. в. п. E существует единственное с точностью до изоморфизма максимальное расширение $\hat{E}$.*

Доказательство этой теоремы проводится с помощью известной конструкции сечений Дедекинда. Пространство $\hat{E}$ состоит из классов $A \subset E$, удовлетворяющих условию

$$\sup(A - A^s) = 0 \tag{3}$$

где A^s — множество верхних границ для A, A^{si} — множество нижних границ для A^s и $A^{si}=\langle A\rangle=A$.

Теорема 2. *У. в. п. E максимально в том и только том случае, если для каждого ограниченного сверху множества A, не имеющего верхней грани, множество $A-A^s$ также не имеет верхней грани.*

Доказательство. Если у. в. п. E максимально, то в этом случае пространство $\hat{E}$ состоит из классов вида $x+E_-$, где $x\in E$ и $E_-=-E_+$. Поэтому если ограниченное сверху подмножество $A\subset E$ не имеет верхней грани, то класс $\langle A\rangle=A^{si}$ не принадлежит пространству $\hat{E}$. Следовательно, на основании условия (3) класс $\langle A-A^s\rangle$ не содержит класса $A_0=E_-$, ибо очевидно, что $\langle A-A^s\rangle\subset\subset A_0$. Если $x\in(A-A^s)^s$, то $x\geqslant a-b$ при всех $a\in A$, $b\in A^s$ и потому $x+b\in A^s$ при всех $b\in A^s$. Из этого следует, что $nx+b\in A^s$ при любом $b\in A^s$ и любом натуральном числе n. Если в множестве $(A-A^s)^s$ существует наименьший элемент x_0, то $x_0=0$, так как $E_+\subset(A-A^s)^s$. Но тогда $\langle A-A^s\rangle=A_0$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что множество $A-A^s$ не имеет верхней грани.

Обратно, пусть для каждого ограниченного сверху множества A, не имеющего верхней грани, множество $A-A^s$ также не имеет верхней грани. Тогда любой класс A в E, удовлетворяющий условию $\langle A-A^s\rangle=A_0$, имеет в E верхнюю грань, т. е. A имеет вид $x+E_-$. Следовательно, пространство $\hat{E}$ состоит из классов вида $x+E_-$, где $x\in E$ и, значит, изоморфно E. Отсюда вытекает, что у. в. п. E максимально.

Из доказанной теоремы следует, что если F — K-пространство, то оно максимально, т. к. в K-пространстве любое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань. Говорят, что у. в. п. E имеет K-пополнение, если существует расширение F у. в. п. E, являющееся K-пространством. Приведем простую характеристику упорядоченных векторных пространств, имеющих K-пополнение.

Упорядоченное векторное пространство E имеет K-пополнение в том и только том случае, если оно архимедово (для каждого $x\in E$ из ограниченности снизу множества $\{nx\}_1^\infty$ следует, что $x\geqslant 0$).

Заметим прежде всего, что если у. в. п. E является подпространством архимедового у. в. п. F, то E — архимедово (имеется в виду, что порядок в E индуцирован из F). Известно, что K-пространства являются архимедовыми у. в. п. Следовательно, если E имеет своим расширением K-пространство F, то у. в. п. E является архимедовым.

Обратно, пусть у. в. п. E — архимедово. Покажем, что в этом случае максимальное расширение $\hat{E}$ является K-пространством. Для этого достаточно показать, что любой класс в E принадлежит множеству $\hat{E}$, ибо частичный порядок в множестве $\mathscr{M}(E)$ всех классов условно полон. Пусть A — класс. По условию (3) нам нужно установить равенство $\langle A-A^s\rangle=A_0$. Если $x\in(A-A^s)^s$, то аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 2, имеем $nx\in(A-A^s)^s$. Следовательно, множество $\{nx\}_1^\infty$ ограничено снизу. Из архимедовости у. в. п. E вытекает, что $x\in E_+$. Поскольку $0\in(A-A^s)^s$, то $0=\sup(A-A^s)$. Тогда $A\in\hat{E}$ и, значит, $\hat{E}=\mathscr{M}(E)$.

2. Пусть E и F — упорядоченные векторные пространства. Линейный оператор $T:E\to F$ называется *положительным*, если $Tx\in F_+$ для каждого элемента $x\in E_+$. Множество линейных положительных операторов $T:E\to F$ будет обозначаться через $L^+(E, F)$. Предположим, что H — минорантное подпространство в E.

Определение [1]. Подпространство H *порождает оператор* $T\in L^+(E, F)$, если для каждого элемента $x\in E$ выполнено соотношение

$$Tx=\sup\{Th:h\in U_x\}. \tag{4}$$

В этом случае также говорят, что подпространство H порождает у. в. п. E относительно оператора T.

Для каждого оператора $T\in L^+(E, F)$ множество

$$\mathrm{Spr}(T, H)=\{T'\in L^+(E, F):T'h=Th;\ \forall h\in H\} \tag{5}$$

называется *ростком оператора T* на подпространстве H. Справедлива следующая

Теорема 3 [1]. *Пусть E — упорядоченное векторное пространство, F — K-пространство и H — минорантное подпространство в E. Тогда H порождает оператор $T\in L^+(E, F)$ в том и только том случае, если* $\mathrm{Spr}(T, H)=\{T\}$.

Особый интерес для нас представляет порождение функционалов в пространстве непрерывных функций $C(Q)$, где Q — хаусдорфов компакт. В силу изоморфизма пространства $M(Q)$ регулярных борелевских мер на Q и пространства $C^*(Q)$, сопряженного к $C(Q)$, будем говорить, что минорантное подпространство $H\subset C(Q)$ порождает меру $\mu\in M_+(Q)$, если выполнено условие

$$\mu(f)=\sup\{\mu(h):h\in U_f\}, \tag{6}$$

где $\mu(f)=\int\limits_Q f d\mu$.

Нас интересуют условия на меру μ, при которых фиксированное подпространство H порождает μ. Особый интерес представляют подпространства H, являющиеся подструктурами в $C(Q)$, задаваемые следующим образом. Пусть $\varphi:Q\to X$ — непрерывное отображение компакта Q на компакт X, φ° — индуцированный линейный оператор из $C(X)$ в $C(Q)$, задаваемый формулой

$$\varphi^\circ g=g\circ\varphi,\quad g\in C(X).$$

Поскольку оператор φ° изометричен и сохраняет порядок, то подпространство $H=\varphi^\circ(C(X))$ является подструктурой в $C(Q)$.

Обозначим через $\mathscr{B}(Q)$, $\mathscr{B}(X)$ борелевские алгебры компактов Q и X соответственно и через $\mathscr{B}_\varphi(Q)$ подалгебру $\mathscr{B}(Q)$, состоящую из множеств $A\in\mathscr{B}(Q)$ вида $A=\varphi^{-1}B$, где $B\in\mathscr{B}(X)$. Для заданной меры $\mu\in M_+(Q)$ определим следующие функции множеств

$$\left.\begin{aligned}\mu'G&=\sup\{\mu A: A\in\mathscr{B}_\varphi(Q),\ A\subset G\},\\ \mu_\varphi B&=\inf\{\mu'G: B\in\mathscr{B}(Q),\ B\subset G\},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где G обозначает открытое подмножество в Q.

Теорема 4. *Пусть $\varphi:Q\to X$ — непрерывное отображение компакта Q на компакт X. Тогда подпространство $H=\varphi^0(C(X))$ порождает ненулевую меру $\mu\in M_+(Q)$ в том и только том случае, если $\mu=\mu_\varphi$.*

Доказательство. Пусть H не порождает меру μ. Тогда, в силу теоремы 3, найдется мера $\mu_1\in\mathrm{Spr}(\mu, H)$, отличная от μ. Рассмотрим меру $\lambda=\mu-\mu_1$. Используя теорему Хана о разложении, возьмем непересекающиеся борелевские множества B_1, $B_2\subset Q$ такие, что мера λ^+ сосредоточена на B_1, а мера λ^- на множестве B_2. В силу регулярности мер λ^+ и λ^- можно считать, что B_1 и B_2 являются множествами типа F_σ. Из непрерывности отображения φ следует, что множества $A_1=\varphi(B_1)$ и $A_2=\varphi(B_2)$

являются F_σ-подмножествами компакта X. Так как для любой функции $g \in C(X)$ имеем $\mu(\varphi^0 g) = \mu_1(\varphi^0 g)$, то $\lambda(\varphi^0 g) = 0$. Для оператора $\psi: M(Q) \to M(X)$, определенного формулой $(\psi\nu)(B) = \nu(\varphi^{-1}B)$, где $B \in \mathscr{B}(X)$, имеем $(\psi\mu)(g) = (\psi\mu_1)(g)$ и $\psi\lambda = \psi\mu - \psi\mu_1 = 0$. Следовательно, справедливы соотношения

$$\lambda^+ \left(\varphi^{-1}(A_1 \setminus A_2)\right) = \lambda\left(\varphi^{-1}(A_1 \setminus A_2)\right) = (\psi\lambda)(A_1 \setminus A_2) = 0;$$
$$\lambda^- \left(\varphi^{-1}(A_2 \setminus A_1)\right) = \lambda\left(\varphi^{-1}(A_2 \setminus A_1)\right) = (\psi\lambda)(A_2 \setminus A_1) = 0.$$

Из этих формул вытекает, что $\lambda^+(B_1 \cap \varphi^{-1}(A_2)) = \lambda^+(B_1)$ и $\lambda^-(B_2 \cap \varphi^{-1}(A_1)) = \lambda^-(B_2)$, причем множества $B_1 \cap \cap \varphi^{-1}(A_2)$ и $B_2 \cap \varphi^{-1}(A_1)$ являются F_σ-подмножествами в Q. Поэтому будем считать, что для множеств B_1, B_2 имеет место равенство $\varphi(B_1) = \varphi(B_2)$. В силу регулярности мер λ^+ и λ^- выберем компактные подмножества $K_1' \subset B_1$ и $K_2' \subset B_2$ так, чтобы $\lambda^+(B_1 \setminus K_1') < \frac{1}{4}\lambda^+(B_1)$ и $\lambda^-\left(B_2 \setminus K_2'\right) < \frac{1}{4}\lambda^-(B_2)$. Тогда $\lambda^+\left(K_1' \setminus \varphi^{-1}(\varphi K_2')\right) \leqslant \lambda^+\left(B_1 \setminus \varphi^{-1}(\varphi K_2')\right) \leqslant \lambda^+(B_1) - \lambda^-(K_2') = \lambda^-(B_2) - \lambda^-(K_2') = \lambda^-(B_2 \setminus K_2') \leqslant \frac{1}{4}\lambda^-(B_2) = \frac{1}{4}\lambda^+(B_1)$. Аналогично $\lambda^-(K_2' \setminus \varphi^{-1}(\varphi K_1')) \leqslant \frac{1}{4}\lambda^-(B_2)$. Из этих неравенств следует, что для компактных множеств $K_1 = K_1' \cap \varphi^{-1}(\varphi K_2')$ и $K_2 = K_2' \cap \varphi^{-1}(\varphi K_1')$ выполняются соотношения $\lambda^+(K_1) = = \lambda^-(K_2) > \frac{1}{2}\lambda^+(B_1)$ и $\varphi(K_1) = \varphi(K_2)$. Из равенств $\lambda^+(K_1) = \lambda(K_1) = \mu(K_1) - \mu_1(K_1)$ вытекает, что $\mu(K_1) > > \frac{1}{2}\lambda^+(B_1) > 0$. Вычислим теперь $\mu_\varphi(K_1)$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ выберем открытое множество G, содержащее K_1 и непересекающееся с K_2 так, чтобы $\mu(G \setminus K_1) < \varepsilon$. Если подмножество $B \in \mathscr{B}_\varphi(Q)$ содержится в G, то $B \cap K_1 = \varnothing$, ибо для любой точки $q \in K_1$ найдется $q' \in K_2$ такая, что $\varphi q = \varphi q'$. Следовательно, $\mu(B) \leqslant \mu(G \setminus K_1) < \varepsilon$ и на основании формулы (7) имеем $\mu'(G) < \varepsilon$. Тогда $\mu_\varphi(K_1) = \inf\{\mu' G : K_1 \subset G\} < \varepsilon$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\mu_\varphi(K_1) = 0$ и, значит, $\mu_\varphi \neq \mu$.

Обратно, предположим, что $\mu_\varphi = \mu$. Поскольку $\mu_\varphi(B) \leqslant \leqslant \mu(B)$ при всех $B \in \mathscr{B}(Q)$, то найдется компакт $K \subset Q$, для которого $\mu(K) > \mu_\varphi(K)$. По определению функции μ_φ

существует открытое множество G, содержащее K, для которого $\mu'(G)<\mu(K)$. Обозначим через Y множество $\varphi(Q\setminus G)$ и положим $K_1=K\cap\varphi^{-1}(Y)$, $K_2=(Q\setminus G)\cap\varphi^{-1}(\varphi K_1)$. Тогда $\varphi(K_1)=\varphi(K_2)$ и $K_1\cap K_2=\varnothing$, причем подмножества K_1 и K_2 являются компактами. Покажем, что $\mu(K\cap\varphi^{-1}Y)=\mu(K_1)>0$. Если множество $B\in\mathscr{B}_\varphi(Q)$ содержится в G, то $B\cap\varphi^{-1}(Y)=\varnothing$ и на основании соотношения $\mu'G=\sup\{\mu B:B\in\mathscr{B}_\varphi(Q),\ B\subset G\}<\mu(K)$ имеет

$$\mu(K\setminus\varphi^{-1}Y)<\mu(K),\quad \mu(K_1)=\mu(K\cap\varphi^{-1}Y)>0.$$

Обозначим через φ_1 и φ_2 сужения отображения φ соответственно на компакты K_1 и K_2 и через Z множество $\varphi(K_1)=\varphi(K_2)$. Далее пусть $\psi_1:M(K_1)\to M(Z)$ и $\psi_2:M(K_2)\to M(Z)$ операторы, соответствующие отображениям $\varphi_1:K_1\to Z$ и $\varphi_2:K_2\to Z$. Поскольку отображения φ_1, φ_2 сурьективны, то и операторы ψ_1, ψ_2 сурьективны. Кроме того, $\psi_1(M_+(K_1))=M_+(Z)=\psi_2(M_+(K_2))$. Обозначим через λ сужение меры μ на алгебру $\mathscr{B}(K_1)$. Тогда существует мера $\mu_2\in M_+(K_2)$, для которой $\psi_2(\mu_2)=\psi_1(\lambda)$. Определим теперь меру $\nu\in M_+(Q)$, полагая для произвольного множества $B\in\mathscr{B}(Q)$

$$\nu(B)=\mu(B\setminus K_1)+\mu_2(B\cap K_2).$$

Легко видеть, что $\nu(K_1)=0$ и, значит, $\nu\neq\mu$, ибо $\mu(K_1)>0$. Покажем, что $\psi(\mu)=\psi(\nu)$. Поскольку $\psi_1(\lambda)=\psi_2(\mu_2)$, то для множества $A\in\mathscr{B}(X)$ имеем $\mu(K_1\cap\varphi^{-1}A)=\lambda(K_1\cap\varphi^{-1}A)=\mu_2(K_2\cap\varphi^{-1}A)$. Следовательно

$$(\psi\mu)(A)=\mu(\varphi^{-1}A)=\lambda(K_1\cap\varphi^{-1}A)+\mu((\varphi^{-1}A)\setminus K_1)=$$
$$=\mu_2(K_2\cap\varphi^{-1}A)+\mu((\varphi^{-1}A)\setminus K_1)=\nu(\varphi^{-1}A)=(\psi\nu)(A).$$

Так как для каждой функции $g\in C(X)$ справедливы равенства

$$\nu(\varphi^0 g)=(\psi\nu)(g)=(\psi\mu)(g)=\mu(\varphi^0 g),$$

то по определению имеем включение $\nu\in\mathrm{Spr}(\mu, H)$. Тогда на основании теоремы 3 H не порождает меру μ. Теорема доказана.

Теорема 4 дает условия на отображение $\varphi:Q\to X$, при котором подпространство $H=\varphi^0(C(X))$ порождает меру μ. Теперь мы выясним условия на φ, при которых подпространство H является супремальным генератором в $C(Q)$. Нам понадобится следующее топологическое понятие.

Определение. Непрерывное отображение $\varphi : A \to B$ топологического пространства A в топологическое пространство B называется *неприводимым*, если $\varphi(F) \neq \varphi(A)$, каково бы ни было собственное замкнутое подмножество $F \subset A$.

Теорема 5. *Пусть $\varphi : Q \to X$ — непрерывное отображение компакта Q на компакт X. Тогда подпространство $H = \varphi^0(C(X))$ является супремальным генератором в $C(Q)$ в том и только том случае, если отображение φ неприводимо.*

Доказательство. Пусть H — супремальный генератор в $C(Q)$ и F — собственное замкнутое подмножество компакта Q. Для точки $q_0 \in Q \setminus F$ рассмотрим функцию $f \in C(Q)$, удовлетворяющую условиям $f|_F = 0$, $f(q_0) = 1$ и $0 \leqslant f(q) \leqslant 1$ для всех $q \in Q$ (в силу леммы Урысона такая функция существует). Поскольку $f = \sup U_f$, то найдется функция $h \in U_f$, для которой существует точка $q_1 \in Q \setminus F$, где $h(q_1) > 0$. Так как $h = g \circ \varphi$ при некоторой функции $g \in C(X)$, то $g(\varphi q_1) > 0$ и $g(\varphi q) \leqslant 0$ при $q \in F$. Тогда $\varphi(q_1) \notin \varphi(F)$ и, значит, $\varphi(F) \neq \varphi(Q)$. Из этого вытекает, что отображение φ неприводимо.

Обратно, пусть отображение φ неприводимо. Рассмотрим функцию $f \in C(Q)$ и некоторую точку $q_0 \in Q$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем окрестность V точки q_0 так, чтобы имело место неравенство $|f(q) - f(q_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $q \in V$. Пусть $m = \inf\limits_{q \in Q} f(q)$. Поскольку отображение φ неприводимо, то $\varphi(Q \setminus V) \neq X$. Для точки $x_0 \in X \setminus \varphi(Q \setminus V)$ рассмотрим функцию $g \in C(X)$, удовлетворяющую условиям:

$$g(x_0) = f(q_0) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad g(x) \leqslant m \text{ при } x \in \varphi(Q \setminus V),$$

$$g(x) \leqslant f(q_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $x \in X$. Легко видеть, что по лемме Урысона такая функция существует. Тогда для функции $h = g \circ \varphi$ и точки $q' \in V$ такой, что $\varphi(q') = x_0$, справедливы соотношения $h \in U_f$, $h(q') \geqslant f(q') - \varepsilon$. Из этих фактов следует, что для функции $f' \in C(X)$ такой, что $f' \geqslant h$ при всех

$h \in U_f$, выполняется неравенство $f'(q) \geqslant f(q') - \varepsilon$ для всюду плотного множества точек компакта Q. Ввиду непрерывности и произвольности $\varepsilon > 0$ получаем неравенство $f' \geqslant f$. Следовательно, по определению $f = \sup U_f$ и, значит, $H = \varphi^0(C(X))$ является супремальным генератором в $C(Q)$.

3. Особый интерес среди пространств $C(Q)$ представляют те, для которых существует конечномерный супремальный генератор. Известно [1], что если Q — конечномерный метрический компакт, то $C(Q)$ обладает конечномерными супремальными генераторами. Из теоремы 5 легко установить, что пространство $C(Q)$ обладает конечномерными супремальными генераторами в том и только том случае, если компакт Q допускает неприводимое отображение на конечномерный метрический компакт. В заключение приведем без доказательства характеристику пространств $C(Q)$, в которых существуют конечномерные супремальные генераторы и укажем оценку для размерности таких генераторов.

Определение [3]. Система Σ открытых подмножеств топологического пространства Y называется *π-базой* пространства Y, если для каждого открытого множества $G \subset Y$ найдется $V \in \Sigma$ такое, что $V \subset G$. Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью π-базы в Y, называется *π-весом.*

Теорема 6. *В пространстве $C(Q)$ существует конечномерный супремальный генератор в том и только том случае, если компакт Q имеет счетный π-вес. Если компакт Q имеет счетный π-вес, то пространство $C(Q)$ обладает генераторами размерности, не превышающей 4.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Двойственность Минковского и ее приложения.— «Усп. мат. наук», 1972, т. 27, № 3, с. 127- 176.
2. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., ГИФМЛ, 1961. 407 с.
3. **Пономарев В. И.** О пространствах, соабсолютных с метрическими.— «Усп. мат. наук», 1966, т. 21, № 4, с. 101—131.
4. **Рутковский Н. В.** Супремальные генераторы в пространствах непрерывных функций.— «Оптимизация», 1974, т. 14 (31), с. 130—141.
5. **Рутковский Н. В.** Общая характеристика пространств непрерывных функций, обладающих супремальными генераторами конечной размерности.— «Оптимизация», 1975, т. 16 (33), с. 147—156.

ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП И УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

П. Е. Соболевский

Хорошо известно, какую роль играют неравенства коэрцитивности при исследовании краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типа. Оказывается, для естественной корректной разрешимости таких задач неравенства коэрцитивности не только достаточны, но и необходимы.

Неравенства коэрцитивности установлены для очень широкого класса краевых задач для дифференциальных уравнений. Иная ситуация имеет место для разностных задач. С этой точки зрения удалось изучить некоторые краевые задачи лишь в таких специальных областях, как параллелепипед или полупространство. Это вызвано, по-видимому, тем, что разностные задачи менее гибки, чем дифференциальные, и не выдерживают, например, замены независимых переменных. В [1] для разностного эллиптического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными в прямоугольнике получен разностный аналог неравенства С. Н. Бернштейна, т. е. установлено неравенство коэрцитивности в L_2-нормах. Далее неравенства в таких нормах были установлены для решений различных типов эллиптических и параболических разностных операторов второго порядка со многими переменными, но также в параллелепипеде [2—7]. В [8—9] была начата теория общих разностных краевых задач в полупространстве и установлены коэрцитивные неравенства в L_2-нормах. Это направление развито в [10—12], где установлены уже L_p-оценки для общих эллиптических и параболических разностных задач в полупространстве. В отличие от дифференциальных задач переход отсюда к краевым задачам в ограниченных областях очень труден, и существенных результатов на этом пути пока получить не удалось.

В [13] к исследованию разностных задач была привлечена теория полугрупп. Были установлены неравенства коэрцитивности в весовых гельдеровских нормах для абстрактных разностных уравнений первого и второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом. Эти результаты в приложениях привели к неравенствам коэрцитивности для разностных эллиптических и параболических уравнений второго порядка в параллелепипеде. Часть из этих результатов затем перенесена [14—16] на некоторые типы разностных эллиптических и параболических уравнений четвертого порядка. Наконец, в [17—22] для разностных уравнений первого и второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами получены неравенства коэрцитивности в нормах пространств Бохнера.

Неравенства коэрцитивности для разностных задач представляют, разумеется, специальную форму устойчивости этих задач. Эта коэрцитивная устойчивость тесно связана не только с пространством, где рассматривается задача, но и с операторами, которые эту задачу определяют. Такая устойчивость является необходимым и достаточным условием естественной корректной разрешимости разностных задач.

Коэрцитивная устойчивость интересна тем, что в отличие от других видов устойчивости она позволяет устанавливать двусторонние оценки быстроты стремления к нулю погрешности решения разностной задачи.

В данной лекции излагаются в основном результаты работ [13, 17—22]. Устанавливается связь корректной разрешимости дифференциальных и разностных задач в банаховом пространстве с теорией аналитических полугрупп.

§ 1. Корректная разрешимость дифференциальной задачи Коши

1.1. Корректная разрешимость задачи Коши в C. Начнем с рассмотрения задачи

$$V'(t)+AV(t)=f(t),\ (0\leqslant t\leqslant 1),\ V(0)=V_0 \qquad (1.1)$$

в произвольном банаховом пространстве E. Здесь $V(t)$ и

$f(t)$ — искомая и заданная функции, определенные на $[0, 1]$ со значениями в E; A — действующий в E аддитивный и однородный оператор с областью определения $D(A)$.

Будем трактовать задачу (1.1) как операторную задачу в некотором функциональном пространстве. Рассмотрим, например, пространство $C=C([0, 1], E)$ непрерывных на $[0, 1]$ функций со значениями в E, норма в котором задается формулой

$$\|f\|_C = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|f(t)\|_E.$$

Функцию $V(t)$ естественно назвать решением в C задачи (1.1), если удовлетворяется уравнение и начальное условие (1.1), и функции $V'(t)$, $AV(t)\in C$. Для того, чтобы такое решение существовало, очевидно, необходимо, чтобы $f(t)\in C$ и $V_0\in D(A)$.

Будем говорить, что *задача* (1.1) *корректно разрешима* (к. р.) в C, если выполнены следующие условия:

1°. При любых $f(t)\in C$ и $V_0\in D(A)$ существует единственное в C решение $V(t)$ задачи (1.1). Это означает, что определен аддитивный и однородный оператор $V(t, f, V_0)\equiv V(t)$ на линейном множестве пар (f, V_0), $f\in C$, $V_0\in D(A)$.

2°. Оператор $V(t, f, V_0)$ непрерывен как оператор из множества пар (f, V_0) с нормой $\|(f, V_0)\| = \|f\|_C + \|V_0\|_E$ в пространство C. Это означает, что справедливо неравенство

$$\|V(t, f, V_0)\| \leqslant M(\|f\|_C + \|V_0\|_E) \tag{1.2}$$

1.2 Необходимые условия корректной разрешимости в C. Рассмотрим сначала оператор $V(t, 0, V_0)$, дающий решение в C задачи

$$V'(t) + AV(t) = 0, \quad (0\leqslant t\leqslant 1), \quad V(0) = V_0. \tag{1.3}$$

Предположим дополнительно, что $D(A)$ плотно в E и что существует ограниченный обратный $(k+A)^{-1}$ при некотором k. Тогда, как известно [23], задача (1.3) будет к. р. в C тогда и только тогда, когда — A будет производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $\exp(-tA)$. Замена переменных $V(t) = \exp(kt)w(t)$, очевидно, переводит к. р. задачу с оператором A в к. р. задачу с оператором $A+k$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что справедлива оценка

$$\|\exp(-tA)\|_{E\to E}\leqslant M\exp(-\delta t),\quad (M>0,\ \delta>0). \quad (1.4)$$

Рассмотрим теперь оператор $V(t, f, 0)$, дающий решение в C задачи

$$V'(t)+AV(t)=f(t)\quad (0\leqslant t\leqslant 1),\ V(0)=V_0=0. \quad (1.5)$$

Условие 2° означает, что оператор $V(t, f, 0)$ непрерывен в C. Из (1.4) вытекает ограниченность A^{-1} и, следовательно, его ограниченность как оператора в C. Поэтому замкнут в C оператор $AV(t, f, 0)$. Так как в силу условия 1° он определен на всем C, то он ограничен. Следовательно, для решений задачи (1.5) справедливо неравенство коэрцитивности

$$\|AV(t)\|_C\leqslant M\|f\|_C. \quad (1.6)$$

Из (1.1) очевидно следует, что правая часть (1.6) оценивает также $\|V'\|_C$. Функция $V(t)=t\exp(-tA)V_0$ при $V_0\in D(A)$ является решением в C задачи (1.5) при $f(t)=\exp(-tA)V_0$. Поэтому из (1.6) и плотности $D(A)$ в E вытекает оценка

$$\|tA\exp(-tA)\|_{E\to E}\leqslant M\exp(-t\delta)\quad (M>0,\ \delta>0) \quad (1.7)$$

Это означает, что полугруппа $\exp(-tA)$ не только сильно непрерывна, но и аналитична [23].

Аналитичность $\exp(-tA)$ в комплексном E можно установить и иначе. Из к. р. задачи (1.5) заменой $V(t)=w(t)+V_0$ выводится разрешимость общей задачи (1.1) и неравенство

$$\|V'\|_C+\|AV\|_C\leqslant M(\|f\|_C+\|AV_0\|_E) \quad (1.8)$$

для ее решений. Далее рассмотрим уравнение $\lambda u+Au=\varphi$, $\lambda=\sigma+i\tau$, $\varphi\in E$. Из оценки (1.4) следует, что оно имеет единственное решение $u=(\lambda+A)^{-1}\varphi$ при любом $\sigma>-\delta$. Далее, очевидно, функция $V(t)=\exp(\lambda t)u$ является решением в C задачи (1.1) с $f(t)=\exp(t\lambda)\varphi$ и $V_0=u$. Из (1.8) тогда следует оценка $\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\|_{E\to E}\leqslant M$ при достаточно большом σ. Переход от A к $A+k$ приводит к оценке

$$\|(\lambda+A)^{-1}\|_{E\to E}\leqslant M(|\lambda|+1)^{-1},\quad \sigma\geqslant 0. \quad (1.9)$$

Это (см. [23]) — критерий аналитичности полугрупп с оценками (1.4) и (1.7). Заметим, что существование определенного на всем E оператора $(\lambda+A)^{-1}$ при достаточно большом σ следует из (1.8) и теории Лере — Шаудера, если оператор не только ограничен, но и вполне непрерывен в E.

1.3. Контрпример. Оказывается, аналитичность $\exp(-tA)$ не является достаточным условием к. р. в C задачи (1.1). Действительно, пусть E — пространство непрерывных на $(-\infty, +\infty)$ скалярных функций $f(x)$ и $|f(x)|\to 0$ при $|x|\to+\infty$. Пусть $AV(x)=-V''(x)$ для тех $V\in E$, что $V''\in E$. Таким образом, (1.1) — это задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности. Из оценок функции Грина этого уравнения следуют оценки (1.4) и (1.7), т. е. аналитичность $\exp(-tA)$. Из к. р. задачи на временном отрезке $[0, 1]$ следует ее к. р. на всей временной оси. Далее, отсюда вытекает к. р. такой же задачи для обратного уравнения теплопроводности. Наконец, отсюда следует к. р. такой же задачи для уравнения четвертого порядка с эллиптическим оператором, равным произведению прямого и обратного оператора теплопроводности. Контрпример, следуя С. Л. Соболеву, дается функцией $V(t, x)=\varphi[r(t, x)]\times\ln|\ln r(t, x)|$, $r(t, x)=t^2[2!]^{-1}+x^4[4!]^{-1}$, где $\varphi(u)$ — гладкая функция, равная единице вблизи точки $u=0$ и равная нулю при $|u|\geqslant 1$.

1.4. Корректная разрешимость в пространстве C_0^α. Обозначим через $C_0^\alpha=C_0^\alpha([0, 1], E)$ банахово пространство, полученное замыканием множества всех гладких на $[0, 1]$ функций со значениями в E в норме

$$\|f\|_{C_0^\alpha}=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f(t)\|_E+\sup_{0<t<t+\Delta t\leqslant 1}\|f(t+\Delta t)-$$
$$-f(t)\|_E\,(\Delta t)^{-\alpha}t^\alpha\quad(0<\alpha<1).$$

К. р. задачи (1.1) в C_0^α определяется так же, как и в C. Из к. р. задачи (1.3) в C_0^α следует ее к. р. в C. Отсюда вытекает сильная непрерывность $\exp(-tA)$. К. р. в C_0^α задачи (1.3) приводит далее к оценке $\|\exp(-tA)V_0\|_{C_0^\alpha}\leqslant$ $\leqslant M\|V_0\|_E$. Эта оценка и к. р. в C_0^α задачи (1.5) позволяет установить, как и в C, аналитичность $\exp(-tA)$. Однако пространства C_0^α лучше пространств C по той причине, что справедлива

Теорема 1.1. *Пусть — A — производящий оператор аналитической полугруппы. Тогда задача* (1.1) *корректно разрешима в C_0^α, причем справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|AV\|_{C_0^\alpha} \leqslant M\left[\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_{C_0^\alpha} + \|AV_0\|_E\right].$$

1.5. Корректная разрешимость в пространстве $\mathbf{B}_p$. Через $B_p = B_p([0, 1], E)$, как обычно, обозначено банахово пространство всех сильно измеримых на $[0, 1]$ со значениями в E функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_p} = \left(\int_0^\infty \|f\|_E^p dt\right)^{1/p} \qquad (1 < p < +\infty).$$

Решением в B_p задачи (1.1) называется абсолютно непрерывная функция $V(t)$, которая почти при всех t удовлетворяет уравнению и начальному условию (1.1), и такая, что $V'(t)$, $AV(t) \in B_p$. Для существования такого решения, очевидно, необходимо, чтобы $f(t) \in B_p$. В отличие от пространств C и C_0^α вывод нужного необходимого условия на V_0 здесь сложнее, и поэтому начнем с к. р. задачи (1.5). Как и в C устанавливается неравенство

$$\|AV\|_{B_p} \leqslant M(p)\|f\|_{B_p} \tag{1.10}$$

для решений этой задачи. Отсюда выводится, что общая задача (1.1) имеет в B_p единственное решение $V(t)$ и

$$\|V'\|_{B_p} + \|AV\|_{B_p} \leqslant M(p)\left(\|f\|_{B_p} + \|AV_0\|_E\right).$$

Это неравенство (как и в C) в случае комплексного E и вполне непрерывного $(k+A)^{-1}$ приводит к аналитичности $\exp(-tA)$. Неизвестно, является ли эта аналитичность достаточным условием к. р. в B_p задачи (1.5). Однако справедлива экстраполяционная

Теорема 1.2. *Пусть задача* (1.5) *к. р. в B_p при некотором $1 < p_0 < +\infty$. Тогда она к. р. в B_p при любом $1 < p < +\infty$, и $M(p) \leqslant Mp^2(p-1)^{-1}$ в* (1.10).

Возникает вопрос, когда выполнено условие этой теоремы.

Например, справедлива

Теорема 1.3. *Если E — гильбертово пространство и* $\exp(-tA)$ *аналитична, то задача* (1.5) *к. р. в* B_2.

Пусть $\exp(-tA)$ — аналитическая полугруппа. Тогда для решения $V(t)$ в B_p задачи (1.1) справедлива формула

$$V(t)=\exp(-tA)V_0+\int_0^t \exp[-(t-s)A]f(s)\,ds. \tag{1.11}$$

Отсюда, в частности, следует, что для разрешимости в B_p задачи (1.3) необходима и достаточна конечность нормы $A\exp(-tA)V_0\|_{B_p}$. Совокупность таких V_0 образует банахово пространство $E_\alpha=E_\alpha(E, A)$, $\alpha=1-1/p$ (пространство следов) с нормой

$$\|V_0\|_{E_\alpha}=\left(\int_0^\infty \|A\exp(-tA)V_0\|_E^{1/(1-\alpha)}dt\right)^{1-\alpha} \quad (0<\alpha<1). \tag{1.12}$$

Теорема 1.4. *При любых* $V_0\in E_{1-1/p}$ *и* $f(t)\in B_p$ *формула* (1.11) *определяет непрерывную на* $[0, 1]$ *функцию со значениями в* $E_{1-1/p}$ *и*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|V(t)\|_{E_{1-1/p}}\leqslant M\left[p^2(p-1)^{-1}\|f\|_{B_p}+\|V_0\|_{E_{1-1/p}}\right]. \tag{1.13}$$

Хотя неравенство (1.13) и не коэрцитивно, однако, оно в отличие от (1.10) имеет место всегда. Наконец, из теорем 1.2 и 1.4 вытекает

Теорема 1.5. *В условиях теоремы* 1.2 *для любых* $f(t)\in B_p$ *и* $V_0\in E_{1-1/p}$ *задача* (1.1) *имеет в* B_p *единственное решение* $V(t)$, *и*

$$\|AV\|_{B_p}+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|V(t)\|_{E_{1-1/p}}\leqslant$$
$$\leqslant M\left[p^2(p-1)^{-1}\|f\|_{B_p}+\|V_0\|_{E_{1-1/p}}\right].$$

Часть приведенных здесь результатов установлена в [24].

§ 2. Корректная разрешимость разностной задачи Коши

2.1. Разностная задача Коши. Дифференциальной задаче (1.1) поставим в соответствие разностную задачу

$$(u_{i+1}-u_i)(\Delta t)^{-1}+Au_{i+1}=\varphi_{i+1},\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1. \tag{2.1}$$

Здесь N — произвольное натуральное число и $\Delta t=N^{-1}$; u_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ — заданные, а $u_1, \ldots, u_N$ — искомые элементы E. Из однозначной разрешимости (при фиксированном Δt) системы (2.1) при любых u_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ следует существование определенного на всем E обратного $(1+\Delta t\cdot A)^{-1}$ и формула

$$u_i=R_A(i)\,u_0+\sum_{k=1}^{i}R_A(i+1-k)\,\varphi_k\cdot\Delta t=V_i+w_i,$$
$$\underset{i=1,2\ldots}{R_A}\ (i)=(1+\Delta t\cdot A)^{-i}. \tag{2.2}$$

Здесь V_i — решение задачи

$$(u_{i+1}-u_i)\cdot(\Delta t)^{-1}+Au_{i+1}=0,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,\quad V_0=u_0, \tag{2.3}$$

а w_i — решение задачи

$$(u_{i+1}-u_i)\cdot(\Delta t)^{-1}+\mathrm{A}u_{i+1}=\varphi_{i+1},\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,\quad w_0=0. \tag{2.4}$$

Если оператор A замкнут, то все операторы $R_A(i)$, очевидно, ограничены. Разностную систему (2.1) (или (2.3) и (2.4)) можно рассматривать как операторное уравнение в линейном пространстве $E(\Delta t)$ векторов $\bar\varphi(\Delta t)=(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ с компонентами из E. Если в нем ввести нормы

$$\|\bar\varphi\|_{C(\Delta t)}=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|\varphi_i\|_E,\quad \|\bar\varphi(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)}=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|\varphi_i\|_E+$$
$$+\max_{1\leqslant i<j\leqslant N}\|\varphi_j-\varphi_i\|_E\,[(j-i)\cdot\Delta t]^{-\alpha}(i\cdot\Delta t)^\alpha,$$
$$\|\bar\varphi(\Delta t)\|_{B_p(\Delta t)}=\left(\sum_{i=1}^{N}\|\varphi_i\|_E^p\cdot\Delta t\right)^{1/p},$$

то оно превратится в соответственно банаховы пространства $C(\Delta t)$, $C_0^\alpha(\Delta t)$ и $B_p(\Delta t)$. Из формул (2.2) следует, что $\bar{u}(\Delta t)=\bar{u}[\Delta t,\ \bar{\varphi}(\Delta t),\ u_0]$ и $A\bar{u}(\Delta t)$ есть линейные, т. е. аддитивные, однородные и непрерывные, операторы из $E(\Delta t)\times E$ в $E(\Delta t)$ в каждой из этих норм.

2.2. Корректная разрешимость разностной задачи. При исследовании разностных схем изучается не отдельная задача (2.1) при фиксированном Δt, а совокупность таких задач при всех $0<\Delta t\leqslant(\Delta t)_0$. Рассматривается линейное пространство ε векторов $\bar{\varphi}=[\bar{\varphi}(\Delta t)]$, $0<\Delta t\leqslant\leqslant(\Delta t)_0$, с бесконечным числом компонент, и вся совокупность задач (2.1) порождает операторное уравнение в ε. Его решение $\bar{u}=[\bar{u}(\Delta t)]$ дается совокупностью формул (2.2). Определим для элементов $\bar{\varphi}\in\varepsilon$ нормы

$$\|\bar{\varphi}\|_{C(\varepsilon)}=\sup_{0<\Delta t\leqslant(\Delta t)_0}\|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C(\Delta t)},$$

$$\|\bar{\varphi}\|_{C_0^\alpha(\varepsilon)}=\sup_{0<\Delta t\leqslant(\Delta t)_0}\|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)},$$

$$\|\bar{\varphi}\|_{B_p(\varepsilon)}=\sup_{0<\Delta t\leqslant(\Delta t)_0}\|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{B_p(\Delta t)}.$$

Совокупности тех $\bar{\varphi}$, для которых каждая из этих норм конечна, образуют теперь различные банаховы пространства, не совпадающие с ε.

Рассмотрим сначала пространство $C(\varepsilon)$. Решению $\bar{u}$ задачи (2.1) в $C(\varepsilon)$ естественным образом сопоставим векторы $\frac{\Delta}{\Delta t}\bar{u}$ и $A\bar{u}$. Если эти векторы принадлежат $C(\varepsilon)$, то по определению $\bar{u}$ — решение в $C(\varepsilon)$. Будем говорить, что (2.1) *корректно разрешима* (*к. р.*) *в* $C(\varepsilon)$, если $\bar{u}=\bar{u}(\bar{\varphi},\ u_0)$ — решение в $C(\varepsilon)$ задачи (2.1) при любых $\bar{\varphi}\in C(\varepsilon)$ и $u_0\in D(A)$ и справедливо неравенство

$$\|\bar{u}\|_{C(\varepsilon)}\leqslant M[\|\bar{\varphi}\|_{C(\varepsilon)}+\|u_0\|_E]. \tag{2.5}$$

Отсюда, как и в дифференциальном случае, следует неравенство коэрцитивности

$$\|A\bar{u}\|_{C(\varepsilon)}\leqslant M[\|\bar{\varphi}\|_{C(\varepsilon)}+\|Au_0\|_E]. \tag{2.6}$$

Из к. р. разностной задачи предельным переходом выводится к. р. дифференциальной задачи. Поэтому $\exp(-tA)$ — аналитическая полугруппа. С другой стороны, из (2.5) (при $\bar{\varphi}=0$) вытекают оценки

$$\|R_A(i)\|_{E\to E}\leqslant M,\quad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.7}$$

т. е. известный (см. [23]) критерий сильной непрерывности $\exp(-tA)$. Далее, из (2.5) (при $u_0=0$ и $\varphi_i=R_A(i-1)\varphi_0$) следуют оценки

$$\|i\cdot\Delta t\cdot AR_A(i)\|_{E\to E}\leqslant M,\quad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{2.8}$$

Предельным переходом отсюда выводится (1.7), т. е. аналитичность $\exp(-tA)$. Если теперь воспользоваться формулой

$$(\lambda+A)^{-i}=[(i-1)!]^{-1}\int\limits_0^\infty \exp(-t\lambda-tA)\,dt \tag{2.9}$$

(см. [23]), то из (1.4) и (1.7) просто следуют (2.7) и (2.8).

Итак, (2.7) и (2.8) — отличный от (1.9) вещественный критерий аналитичности. Однако эта аналитичность не является достаточным условием к. р. (2.1) в $C(\varepsilon)$, так как аналогичный факт несправедлив для дифференциальной задачи.

2.3. Корректная разрешимость разностной задачи в $C_0^\alpha(\varepsilon)$, и $B_p(\varepsilon)$. Аналогично $C(\varepsilon)$ определяется и исследуется к. р. задачи (2.1) в $C_0^\alpha(\varepsilon)$. Соответствующее неравенство коэрцитивности имеет вид

$$\|A\bar{u}\|_{C_0^\alpha(\varepsilon)}\leqslant M(\alpha)\|\bar{\varphi}\|_{C_0^\alpha(\varepsilon)}+M\|Au_0\|_E, \tag{2.10}$$

и из него выводится аналитичность $\exp(-tA)$. Справедлива

Т е о р е м а 2.1. *Если* $\exp(-tA)$ *аналитична, то задача* (2.1) *к. р. в* $C_0^\alpha(\varepsilon)$ *и* $M(\alpha)\leqslant M\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}$ *в* (2.10).

Для пространств $B_p(\varepsilon)$ (как и в случае дифференциальной задачи) сначала исследуется к. р. задачи (2.4) и устанавливается неравенство коэрцитивности

$$\|A\bar{u}\|_{B_p(\varepsilon)}\leqslant M(p)\|\bar{\varphi}\|_{B_p(\varepsilon)}. \tag{2.11}$$

Т е о р е м а 2.2. *Пусть задача* (2.4) *к. р.* в B_{p^0} *при некотором* $1<p_0<+\infty$. *Тогда она к. р. в* $B_p(\varepsilon)$ *при любом* $1<p<+\infty$ *и* $M(p)=Mp^2(p-1)^{-1}$ *в* (2.11).

Т е о р е м а 2.3. *Если пространство* E *гильбертово, то задача* (2.4) *к. р. в* $B_2(\varepsilon)$.

Формулы (2.2) определяют решение в $B_p(\varepsilon)$ задачи (2.3), если и только если u_0 принадлежит банахову пространству $\widetilde{E}_\alpha$, $\alpha = 1 - 1/p$, с нормой

$$\| u_0 \|_{\widetilde{E}_\alpha} = \sup_{0 < \Delta t \leqslant (\Delta t)_0} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \| A R_A(i) u_0 \|^{1/(1-\alpha)} \right]^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1); \tag{2.12}$$

Теорема 2.4. *Пространства* $\widetilde{E}_\alpha$ *и* E_α *и их нормы* (2.12) *и* (1.12) *совпадают.*

Обозначим через ε_α — линейное пространство вида ε, для которого исходным будет E_α. Справедлива

Теорема 2.5. *Формулы* (2.2) *определяют решение* $\bar{u} \in C(\varepsilon_{1-1/p})$ *при любых* $\bar{\varphi} \in B_p(\varepsilon)$ *и* $u_0 \in E_{1-1/p}$, *и*

$$\| \bar{u} \|_{C(\varepsilon_{1-1/p})} \leqslant M \left[p^2 (p-1)^{-1} \| \bar{\varphi} \|_{B_p(\varepsilon)} + \| u_0 \|_{E_{1-1/p}} \right].$$

Наконец, из теорем 2.2 и (2.5) вытекает

Теорема 2.6. *В условиях теоремы* 2.2 *справедливо неравенство*

$$\| A\bar{u} \|_{B_p(\varepsilon)} + \| \bar{u} \|_{C(\varepsilon_{1-1/p})} \leqslant M \left[p^2 (p-1)^{-1} \| \bar{\varphi} \|_{B_p(\varepsilon)} + \right.$$
$$\left. + \| u_0 \|_{E_{1-1/p}} \right].$$

§ 3. Корректная разрешимость задачи Коши в $C_0^\alpha(\varepsilon)$

3.1. Исследование задачи (2.3). Здесь приводится схема доказательства теоремы 2.1 и некоторые ее обобщения. Начнем с задачи (2.3). Из (2.7) и (2.8) вытекает, что

$$\| R_A(i+j) - R_A(i) \|_{E \to E} \leqslant M \cdot (j\Delta t) \cdot (i\Delta t)^{-1}.$$

Поэтому, в силу (2.7), для любых $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ справедливы оценки

$$\| R_A(i+j) - R_A(i) \|_{E \to E} \leqslant M \cdot (j\Delta t)^\alpha \cdot (i\Delta t)^{-\alpha}. \tag{3.1}$$

Оценки (2.7) и (3.1) приводят к нужному неравенству

$$\| Au_i \|_E + \| Au_{j+i} - Au_i \|_E \cdot (j\Delta t)^{-\alpha} (i\Delta t)^\alpha \leqslant M \| Au_0 \|_E$$

для решений задачи (2.3).

3.2. Исследование задачи (2.4). Воспользуемся тождеством

$$Au_i [1 - R_A(i)] \varphi_i + \sum_{k=1}^{i} A R_A(i+1-k) (\varphi_k - \varphi_i) \Delta t = \gamma_i + \delta_i$$

и прежде всего, как и выше, установим, что

$$\|\bar{\gamma}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)} \leqslant M \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)}.$$

Далее, в силу (2.7), получим, что

$$\|\delta_i\|_E \leqslant M \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)} \cdot \sum_{k=1}^{i} [(i+1-k)\Delta t]^{\alpha-1} (k\Delta t)^{-\alpha} \Delta t \leqslant$$

$$\leqslant M \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)} \int_0^{(i+1)\Delta t} [(i+1)\Delta t - s]^{\alpha-1} s^{-\alpha} ds \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \alpha^{-1} (1-\alpha)^{-1} \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)}.$$

Пусть $i \leqslant 2j$. Тогда, в силу последней оценки, будем иметь

$$\|\delta_{i+j} - \delta_i\|_E \leqslant \|\delta_{i+j}\|_E + \|\delta_i\|_E \leqslant 2M_1 \alpha^{-1} (1-\alpha)^{-1} \times$$

$$\times \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha} (\Delta t) \leqslant 2^{\alpha+1} M_1 \alpha^{-1} (1-\alpha)^{-1} \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)} \cdot$$

$$\cdot (j\Delta t)^\alpha \cdot (i\Delta t)^{-\alpha}.$$

Если же $i \geqslant 2j$, то воспользуемся тождеством

$$\delta_{i+j} - \delta_i = \sum_{k=i-j+1}^{i+j} AR_A(i+j+1-k)(\varphi_k - \varphi_{i+j})\Delta t -$$

$$- \sum_{k=i-j+1}^{i} AR_A(i+1-k)(\varphi_k - \varphi_i)\Delta t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{i-j} A[R_A(i+j+1-k) - R_A(i+1-k)](\varphi_k - \varphi_i)\Delta t +$$

$$+ [R_A(2j) - R_A(i+j)](\varphi_i - \varphi_{i+j}) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Прежде всего из (2.7) следует, что

$$\|J_4\|_E \leqslant M \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)} \cdot (j\Delta t)^\alpha (i\Delta t)^{-\alpha}.$$

Далее, в силу (2.8), получим, что

$$\|J_2\|_E \leqslant M \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)} \cdot \int_{(i-j)\Delta t}^{i\Delta t} (i\Delta t - s)^{-2+\alpha} s^{-\alpha} ds \leqslant$$

$$\leqslant 2^\alpha \alpha^{-1} M \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_0^\alpha(\Delta t)} \cdot (j\Delta t)^\alpha (i\Delta t)^{-\alpha},$$

так как $i-j\geqslant{}^1/_2 i$. Аналогично оценивается и $\|J_1\|_E$. Наконец, как и (3.1), устанавливается, что

$$\|A[R_A(i+j)-R_A(i)\|_{E\to E}\leqslant M\cdot(j\Delta t)^{\alpha}\cdot(i\Delta t)^{-\alpha-1},\ i=2,\ 3,\ \ldots$$

при любых $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Поэтому

$$\|J_3\|_E\leqslant M\|\bar\varphi(\Delta t)\|_{C_0^{\alpha}(\Delta t)}\cdot(j\Delta t)\int\limits_0^{(i-j)\Delta t}(i\Delta t-s)^{-2+\alpha}s^{-\alpha}ds\leqslant$$

$$\leqslant(1-\alpha)^{-1}M_1\|\bar\varphi(\Delta t)\|_{C_0^{\alpha}(\Delta t)}\cdot(j\Delta t)^{\alpha}(i\Delta t)^{-\alpha}.$$

Этим завершается доказательство теоремы 2.1.

3.3. Неравенство в $C(\Delta t)$ **с логарифмом.** Положить $\alpha=0$ в (2.10) нельзя. Однако справедлива

Теорема 3.1. *Для решений задачи* (2.1) *справедливо неравенство*

$$\|A\bar u(\Delta t)\|_{C(\Delta t)}\leqslant M\left[\ln\frac{1}{\Delta t}\|\bar\varphi(\Delta t)\|_{C(\Delta t)}+\|Au_0\|_E\right]\quad(3.2)$$

для достаточно малого $(\Delta t)_0$ *и всех* $0<\Delta t\leqslant(\Delta t)_0$.

Для доказательства нужно воспользоваться очевидными неравенствами

$$\|\bar\varphi(\Delta t)\|_{C(\Delta t)}\leqslant\|\bar\varphi(\Delta t)\|_{C_0^{\alpha}(\Delta t)}\leqslant M(\Delta t)^{-\alpha}\|\bar\varphi(\Delta t)\|_{C(\Delta t)}$$

и в неравенстве (2.10) с $M(\alpha)=M\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}$ положить $\alpha=\left[\ln\frac{1}{\Delta t}\right]^{-1}$.

3.4. Уравнения с переменным оператором. Рассмотрим более общую, чем (1.1), задачу

$$V'(t)+A(t)V(t)=f(t)\ (0\leqslant t\leqslant 1),\ V(0)=V_0\quad(3.3)$$

и соответствующую ей разностную задачу

$$(u_{i+1}-u_i)(\Delta t)^{-1}+A_{i+1}u_{i+1}=\varphi_{i+1},\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,\quad(3.4)$$
$$A_i=A(t_i),\quad t_i=i\Delta t.$$

Пусть $A(t)$ при каждом $t\in[0,\ 1]$ порождает аналитическую полугруппу $\exp[-sA(t)]$ $(s\geqslant 0)$ с экспоненциально убывающей нормой. Пусть область определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$ не зависит от t, и оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ удовлетворяет условию Гельдера

$$\|[A(t)-A(\tau)]A^{-1}(0)\|_{E\to E}\leqslant M|t-\tau|^{\beta}\ (t,\ \tau\in[0,\ 1],\quad 0<\beta<1). \tag{3.5}$$

Тогда известным методом „замороженных коэффициентов“ доказывается, что для решений задачи (3.4) справедливо неравенство (2.10) при любых $0<\alpha\leqslant\beta$. При этом невозможно уследить за ростом $M(\alpha)$ при $\alpha\to+0$ и приходится $(\Delta t)_0=(\Delta t_0)(\alpha)$ выбирать тем меньше, чем меньше α. Оказывается, что справедлива

Теорема 3.2. *При всех* $0<\alpha\leqslant\beta$ *для решений задачи* (3.4) *справедливо неравенство* (2.10) *с* $A=A(\tau)$ *при любом* $\tau\in[0,\ 1]$ *и* $M(\alpha)\leqslant M\alpha^{-1}$. *Отсюда следует* (3.2).

Доказательство проводится по схеме п. 3.1 и 3.2. Решение задачи (3.4) задается формулами

$$u_i=u_{\Delta t}(i,0)\,u_0+\sum_{k=1}^{i}u_{\Delta t}(i,\ k-1)\,\varphi_k\Delta t; \tag{3.6}$$

$$u_{\Delta t}(i,\ r-1)=(1+\Delta tA_i)^{-1}\cdot\ldots\cdot(1+\Delta tA_r)^{-1},\ 1\leqslant r\leqslant i$$

и для оператора $u_{\Delta t}$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}\|u_{\Delta t}(k,\ j)\|_{E\to E}\leqslant M;\ \|A_k u_{\Delta t}(k,\ j)A_j^{-1}\|_{E\to E}\leqslant M;\\ \|\Delta t(k-j)A_k u_{\Delta t}(k,\ j)\|_{E\to E}\leqslant M;\ \|u_{\Delta t}(k+r,\ j)-u_{\Delta t}(k,j)\|\leqslant\\ \leqslant M\psi; \qquad (3.7)\\ \|A_{k+r}u_{\Delta t}(k+r,\ j)-A_k u_{\Delta t}(k,\ j)\|_{E\to E}\leqslant M\psi[(k-j)\Delta t]^{-1};\\ \|A_{k+r}u_{\Delta t}(k+r,\ j)A_j^{-1}-A_k u_{\Delta t}(k,\ j)A_j^{-1}\|_{E\to E}\leqslant M\psi,\end{gathered}$$

где $\psi=(r\Delta t)^{\beta}+(r\Delta t)^{\alpha}[(k-j)\Delta t]^{-\alpha}$. Для их вывода используются тождества

$$\begin{gathered}u_{\Delta t}(k,\ j)=R_j(k-j)+\sum_{i=j+1}^{k}R_k(k+1-i)(A_k-\\ -A_i)\,u_{\Delta t}(i,\ j)\,\Delta t; \qquad (3.8)\\ u_{\Delta t}(k,\ j)=R_j(k-j)+\sum_{i=j+1}^{k}u_{\Delta t}(k,\ j-1)\times\\ \times(A_j-A_i)\,R_j(i-j)\,\Delta t,\end{gathered}$$

связывающие разрешающие операторы уравнений с переменными и постоянными коэффициентами и оценки гладкости операторов $R_k(i)=R_{A_k}(i)$.

§ 4. Корректная разрешимость задачи Коши в $B_p(\varepsilon)$

4.1. Исследование задачи (2.4). Экстраполяционная теорема 2.2 основана на следующем утверждении об операторах, действующих в $B_p^\infty = B_p[(-\infty, +\infty), E]$. Обозначим через $\overset{0}{B}_\infty$ плотное в таком пространстве множество ограниченных функций с компактным носителем. Пусть далее B_∞^{loc} — множество сильно измеримых, ограниченных на каждом конечном отрезке функций. Справедлива ([25])

Теорема 4.1. *Пусть K — аддитивный и однородный оператор из $\overset{0}{B}_\infty$ в B_∞^{loc}. Пусть для некоторого $1 < p_0 < +\infty$ оператор K действует из $\overset{0}{B}_\infty$ в $B_{p_0}^\infty$ и ограничен в $B_{p_0}^\infty$. Пусть для любой функции $f(t) \in \overset{0}{B}_\infty$, носитель которой заключен в множестве $|t - t_0| < \rho$, $-\infty < t_0 < +\infty$, $\rho > 0$, и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0$, функция $Kf(t) \in B_1^\infty$, и*

$$\int_{|t-t_0|>c_1\rho} \|Kf(t)\|_E\,dt \leqslant c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_E\,dt$$

при некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Тогда при любом $1 < p < p_0$ оператор K допускает замыкание до ограниченного в B_p^∞ оператора, норма которого не превосходит $M(p_0) \times \times (p-1)^{-1}(p_0-p)^{-1}$.

Теорема 4.1 применяется к исследованию операторов свертки, и поэтому отсюда следует теорема 1.2, так как соответствующий задаче оператор отличается в силу неравенства Гильберта от оператора свертки на ограниченный в B_p оператор. Для исследования задачи (2.4) нужно от разностного оператора (2.2) (при $u_0 = 0$), дающего ее решение, перейти с помощью оператора усреднения к оператору K, действующему из B_p^∞, в пространство сеточных функций с шагом Δt. Ограниченность в $B_p(\varepsilon)$ оператора (2.2) (при $u_0 = 0$) оказывается при этом эквивалентной ограниченности в B_p^∞ оператора K. Хотя оператор K не оператор свертки, тем не менее удается применить к нему теорему 4.1 и получить теорему 2.2. Для доказательства теоремы 2.3 оператор K изучается в подпространстве ступенчатых функций с шагом Δt пространства B_2^∞, и его ограниченность вытекает из ограниченности образа Фурье $\hat{K}$ и равенства Парсеваля.

4.2. Оценки в нормах следов. Установим теорему 2.4. Пусть $u_0 \in E_\alpha$. Тогда из (2.9) следует, что при любом целом $M > 1$

$$\sum_{i=1}^{M} \| AR_A(i) u_0 \|_E^{1-1/p} \cdot \Delta t \leqslant \sum_{i=1}^{M} \left\{ \int_0^\infty t^{i-1} [(i-1)!]^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \exp(-t)\, dt \right\}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \int_0^\infty t^{i-1} [(i-1)!]^{-1} \exp(-t) \times$$

$$\times \| A \exp(-t \cdot \Delta t A) u_0 \|_E^{\frac{1}{1-\alpha}} dt \cdot \Delta t \leqslant \| u_0 \|_{E_\alpha}^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Поэтому $E_\alpha \subset \widetilde{E}_\alpha$ и $\| u_0 \|_{\widetilde{E}_\alpha} \leqslant \| u_0 \|_{E_\alpha}$. Обратные включение и неравенство следуют из того, что $R_A(i) u_0 \to \exp(-tA) u_0$ при $i \Delta t \to t$. Для доказательства теоремы 2.5 достаточно оценить решение задачи (2.4). В силу (2.2) (при $u_0 = 0$) и (2.9) будем иметь

$$A \exp(-\Delta t \cdot sA) u_i = \int_0^\infty A \exp[-\Delta t (t+s) A] \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{i} t^{i-k} [(i-k)!]^{-1} \exp(-t)\, \varphi_k \Delta t dt.$$

В дальнейшем используем оценку (1.7) и неравенства Гильберта и Гельдера.

Пространства E_α описываются достаточно сложно. В связи с этим представляют интерес для приложений непрерывные вложения этих пространств в более просто описываемые пространства. Из оценок (1.4) и (1.7) вытекают равномерно по α непрерывные вложения $D(A) \subset \subset E_\alpha \subset E$. Более интересна

Теорема 4.2. *Пусть банахово пространство F непрерывно вложено в $D(A)$ и при некотором $\alpha \in (0, 1)$*

$$\| V \|_F \leqslant M \| AV \|_E^\alpha \| V \|_E^{1-\alpha} \quad (V \in D(A)). \qquad (4.1)$$

Тогда F непрерывно вложено в $E_{\alpha+\varepsilon}$ при любых $0 < \varepsilon < 1-\alpha$, и

$$\| V \|_F \leqslant M \varepsilon^{-\alpha} \| V \|_{E_{\alpha+\varepsilon}}^{1/2} \| V \|_{E_{\alpha-\varepsilon}}^{1/2} \quad (V \in E_{\alpha+\varepsilon}). \qquad (4.2)$$

Неравенства вида (4.1) вытекают из широко известных мультипликативных неравенств для норм пространства дифференцируемых функций и неравенств коэрцитивности. Условия теоремы 4.2 не только достаточны для справедливости (4.2), но и необходимы, так как для норм E_α имеет место мультипликативное неравенство

$$\|V\|_{E_\alpha} \leqslant M\alpha^{-1} \|AV\|_E^\alpha \|V\|_E^{1-\alpha} \quad (V \in D(A)). \tag{4.3}$$

Для доказательства (4.2) используется тождество

$$V = 2\int_0^\infty A\exp(-2tA)\,V dt,$$

неравенство (4.1) и оценки (1.4) и (1.7), и устанавливается, что

$$\|V\|_F \leqslant M\int_0^\infty t^{-\alpha} \|A\exp(-tA)\,V\|_E\, dt.$$

Разбив интеграл справа на сумму двух по $[0, a]$ и $[\alpha, +\infty)$ и применив в каждом из них неравенство Гельдера с тем, чтобы получить нормы $E_{\alpha+\varepsilon}$ и $E_{\alpha-\varepsilon}$ соответственно, получим после минимизации по всем $a>0$ неравенство (4.2). Аналогично устанавливается более общее неравенство с нормами E_{α_1} и E_{α_2} справа при любых $0<\alpha_2<\alpha<\alpha_1<1$. Таким же путем доказывается и (4.3).

4.3. Исследование задачи (2.2). Из теорем 2.2 и 2.5. очевидно, вытекает теорема 2.6. Неравенство коэрцитивности можно записать в виде

$$\|A\bar{u}(\Delta t)\|_{B_p \Delta t} + \|\bar{u}(\Delta t)\|_{C(\Delta t, E_{1-1/p})} \leqslant$$
$$\leqslant M\,[p^2 (p-1)^{-1} \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{B_p(\Delta t)} + \|u_0\|_{E_{1-1/p}}.$$

Положив $p = \ln\frac{1}{\Delta t}$ в (4.4) и применив очевидные неравенства

$$\|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{B_p(\Delta t)} \leqslant \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C(\Delta t)} \leqslant (\Delta t)^{-1} \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{B_p(\Delta t)},$$

получим для достаточно малого $(\Delta t)_0$ и всех $0<\Delta t\leqslant \leqslant (\Delta t)_0$ неравенство

$$\|A\bar{u}(\Delta t)\|_{C(\Delta t)} \leqslant M\left[\ln\frac{1}{\Delta t} \|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{B_{\ln\frac{1}{\Delta t}}(\Delta t)} + \|u_0\|_{E_{1-1/\ln\frac{1}{\Delta t}}}\right]. \tag{4.5}$$

Неравенство (4.5) тоньше неравенства (3.2). Однако оно (при $\varphi(\Delta t)\equiv 0$) получено в предположении, что (4.4) имеет место при некотором $1<p_0<+\infty$.

4.4. Задача Коши с переменным оператором. К. р. задачи (3.4) в $B_p(\varepsilon)$ можно, как и в случае $C_0^\alpha(\varepsilon)$ установить с помощью метода „замороженных коэффициентов". При этом достаточно требовать, чтобы оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ была лишь непрерывной. Однако в отличие от $C_0^\alpha(\varepsilon)$ приходится предполагать, что задача (2.1) с постоянным, зависящим от параметра, оператором $A=A(\tau)$ $(0\leqslant\tau\leqslant 1)$ (задача (2.1)) к. р. в $B_p(\varepsilon)$. Вначале из к. р. задачи (2.1⁰) выводится к. р. задачи (3.4) на малом отрезке $[0, h]\subset[0, 1]$. Для того чтобы продолжить это решение, нужно исследовать связь пространств $E_\alpha=E_\alpha(\tau)$ при различных τ.

Теорема 4.3. *Пространства $E_\alpha(\tau)$ не зависят от τ, причем*

$$u_0\|_{E_\alpha(\tau_1)}\leqslant M\alpha^{-1}\|u_0\|_{E_\alpha(\tau_2)},\quad (\tau_1, \tau_2\in[0, 1], u_0\in E_\alpha(0)).$$

Доказательство основано на следующем утверждении ([26]):

Теорема 4.4. *Пусть $-A$ и $-B$ — производящие операторы аналитических полугрупп с экспоненциально убывающими нормами и $E_\alpha(A)$ и $E_\alpha(B)$ — соответствующие им пространства следов. Пусть F — линейный оператор в E и из $D(B)$ в $D(A)$ соответственно с нормами*

$$F_0=\|F\|_{E\to E}\ \text{и}\ F_1=\|AFB^{-1}\|_{E\to E}.$$

Тогда F — линейный оператор из $E_\alpha(B)$ в $E_\alpha(A)$, и

$$\|Fu_0\|_{E_\alpha(A)}\leqslant M\alpha^{-1}F_1^\alpha F_0^{1-\alpha}\|u_0\|_{E_\alpha(B)}\ (u_0\in E_\alpha(B)).\quad(4.6)$$

Таким образом устанавливается

Теорема 4.5. *Для решений задачи (3.4) справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|A(\tau)\bar{u}\|_{B_p(\varepsilon)}+\|\bar{u}\|_{C(\varepsilon_{1-1/p}(\tau))}\leqslant M(p)\left[\|\bar{\varphi}\|_{B_p(\varepsilon)}+\|u_0\|_{E_{1-1/p}(\tau)}\right].$$

Однако метод „замороженных коэффициентов" не дает возможности проследить за ростом $M(p)$. Если же выполнено условие (3.5), то справедлива

Теорема 4.6. *Пусть* $u_0 \in E_{1-1/p}$ *и* $\bar{u}(\Delta t)$ — *решения задачи* (3.4). *Тогда*

$$\|u_i\|_{E_{1-1/p}(A_i)} \leqslant M\,[p^2(p-1)^{-1}\|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{B_p(\Delta t)} + \\ + p(p-1)^{-1}\|u_0\|_{E_{1-1/p}(\tau)}.$$

Для доказательства воспользуемся тождеством

$$u_i = u_{\Delta t}(i, 0)\,u_0 + \sum_{k=1}^{i} [u_{\Delta t}(i, k-1) - \\ - R_i(i+1-k)]\,\varphi_k\Delta t + \sum_{k=1}^{i} R_i(i+1-k)\varphi_k\Delta t = J_1 + J_2 + J_3.$$

Нужная оценка для J_1 вытекает из (3.7) и (4.6). Для оценки J_2 нужно применить теорему 2.5 для $A = A_i$. Наконец, с помощью тождеств (3.8) устанавливаются оценки

$$\|u_{\Delta t}(i, k) - R_i(i-k)\|_{E\to E} \leqslant M[\Delta t(i-k)]^{\beta};$$
$$\|A_i[u_{\Delta t}(i, k) - R_i(i-k)\|_{E\to E} \leqslant M[\Delta t(i-k)]^{\beta-1}.$$

Воспользовавшись неравенством (4.3), получим отсюда оценку

$$\|[u_{\Delta t}(i, k) = R_i(i-k)]\|_{E\to E_\alpha(A_i)} \leqslant M\alpha^{-1}[\Delta t\cdot(i-k)]^{\beta-\alpha}.$$

Неравенство Гильдера позволяет получить нужную оценку J_3.

§ 5. Корректная разрешимость дифференциальной краевой задачи

5.1. Дифференциальная краевая задача. В пространстве E рассматривается задача

$$-V''(t) + AV(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \quad V(0) = V_0, \quad V(1) = V_1. \tag{5.1}$$

Ее решением в C естественно назвать такую удовлетворяющую уравнению и граничным условиям (5.1) функцию $V(t)$, что $V''(t)$, $AV(t) \in C$. К. р. здесь определяется аналогично задаче Коши. Наряду с (5.1) рассмотрим краевые задачи

$$-V''(t)+AV(t)=0 \quad (0\leqslant t\leqslant 1); \quad V(0)=V_0, \quad V(1)=V_1; \tag{5.2}$$

$$-V''(t)+AV(t)=f(t) \quad (0\leqslant t\leqslant 1); \quad V(0)=V(1)=0, \tag{5.3}$$

и исследование начнем с к. р. задачи (5.3). Как и в случае задачи Коши, для ее решений устанавливается неравенство коэрцитивности

$$\|AV\|_C\leqslant M\|f\|_C.$$

Отсюда для решений задачи (5.1) вытекает неравенство

$$\|V''\|_C+\|AV\|_C\leqslant M[\|f\|_C+\|AV_0\|_E+\|AV_1\|_E]. \tag{5.4}$$

Если $(k+A)^{-1}$ вполне непрерывен, то, как и в случае задачи Коши, из (5.4) выводится, что при достаточно большом $\lambda>0$ оператор $\lambda+A$ имеет ограниченный обратный, норма которого убывает на бесконечности как λ^{-1}. При этом (из-за двух граничных условий) функцию $V(t)$ нужно умножить на срезающую функцию и воспользоваться известным мультипликативным неравенством, связывающим нормы различных производных. Полученное свойство оператора A лишь необходимо для к. р. в C задачи (5.3), так как известный пример С. Л. Соболева для оператора Лапласа показывает, что оно не достаточно для к. р. в C этой задачи.

5.2. Формула для решения задачи (5.1). Будем считать, что операторы $\lambda+A$ ограниченно обратимы для всех $\lambda\geqslant 0$. Это означает, что справедлива оценка

$$\|(A+\lambda)^{-1}\|_{E\to E}\leqslant M(\lambda+1)^{-1} \quad (\lambda\geqslant 0). \tag{5.5}$$

Такие операторы A с плотными областями определения называют позитивными. Если $-A$ — производящий оператор экспоненциально убывающей аналитической полугруппы, то, очевидно, он позитивен. Однако позитивность существенно более слабое свойство.

Из оценки (5.5) следует, что резольвентное множество оператора A содержит не только неположительную действительную полуось, но и при любых $0<\varepsilon<1$ множество G_ε комплексной плоскости $\lambda=\sigma+i\tau$, выделяемое неравенствами $|\tau|\leqslant(1-\varepsilon)M^{-1}(1+|\sigma|)$ при $\sigma\leqslant 0$ и $\sqrt{\sigma^2+\tau^2}\leqslant(1-\varepsilon)M^{-1}$ при $\sigma\geqslant 0$. Это позволяет по убывающим на бесконечности аналитическим функциям $\varphi(z)$ определить (по формуле Коши — Рисса) функции $\varphi(A)$ позитивного оператора A. Так определены, например, отрицательные степени $A^{-\alpha}$, представляющие аналитическую (по α) полугруппу. Положительные степени A^{α} можно определить как обратные к отрицательным. Это уже неограниченные, но замкнутые операторы со всюду плотными областями определения. С уменьшением α улучшаются спектральные свойства A^{α}. Так, например, $-\sqrt{A}$ — производящий оператор аналитической экспоненциально убывающей полугруппы [23].

Пусть $V(t)$ — решение в C задачи (5.1), и $\sqrt{A}V'(t)$ непрерывна. Тогда (5.1) можно расщепить на систему двух уравнений первого порядка

$$V'(t)+\sqrt{A}V(t)=z(t), \quad -z'(t)+\sqrt{A}z(t)=f(t) \tag{5.6}$$

и так прийти к формуле

$$\begin{aligned} V(t) = \{&\exp\{-t\sqrt{A}) - [1-\exp(-2\sqrt{A})]^{-1}[\exp(-\\ &-(2-t)\sqrt{A}) - \exp(-(2+t)\sqrt{A})]\}V_0 +\\ &+\{\exp[-(1-t)\sqrt{A}] - \exp[-(1+t)\sqrt{A}]\}[1-\\ &-\exp(-2\sqrt{A})]^{-1}V_1 - \{\exp[-(1-t)\sqrt{A}]-\\ &-\exp[-(1+t)\sqrt{A}]\}[1-\exp(-2\sqrt{A})]^{-1}(2\sqrt{A})^{-1}\times\\ &\times\int_0^1\{\exp[-(1-\tau)\sqrt{A}] - \exp[-(1+\tau)\sqrt{A}]\}f(\tau)\,d\tau+\\ &+(2\sqrt{A})^{-1}\int_0^1\{\exp[-|t-\tau|\sqrt{A}]-\\ &-\exp[-|t+\tau|\sqrt{A}]\}f(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Здесь обратный к оператору $1-\exp(-2\sqrt{A})$ существует и ограничен, так как, в силу экспоненциального убывания нормы полугруппы, спектральный радиус оператора $\exp(-2\sqrt{A})$ меньше единицы. От условия непрерывности $\sqrt{A}V'(t)$ можно освободиться, если заменить $V(t)$ на $\exp(-\varepsilon\sqrt{A})V(t)$ и в полученной формуле перейти к пределу при $\varepsilon\to+0$.

5.3. Корректная разрешимость в C_{01}^{α}. Расщепление (5.1) на систему (5.6) подсказывает, в каких пространствах исследовать задачу (5.1). Пусть $\overline{C_{01}^{\alpha}} = C_{01}^{\alpha}([0, 1], E)$ $(0<\alpha<1)$ — замыкание множества всех определенных на $[0, 1]$ со значениями в E гладких функций в норме

$$\|f\|_{C_{01}^{\alpha}} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f(t)\|_E + \sup_{0<t<t+\Delta t<1}\|f(t+\Delta t) - \\ - f(t)\|_E\,\Delta t^{-\alpha}t^{\alpha}(1-t-\Delta t)^{\alpha}. \tag{5.8}$$

Аналогично C определяется к. р. задачи (5.1) в C_{01}^{α}, для ее решений выводится неравенство коэрцитивности, из которого следует позитивность A. Справедлива

Теорема 5.1. *Пусть A — позитивен. Тогда задача* (5.1) *к. р. в C_{01}^{α} и для ее решений справедливо неравенство*

$$\|AV\|_{C_{01}^{\alpha}} \leqslant M\,[\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_{C_{01}^{\alpha}} + \|AV_0\|_E + \|AV_1\|_E]. \tag{5.9}$$

5.4. Корректная разрешимость в B_p. Как и в случае задачи Коши, здесь удобно начать с исследования задачи (5.3). Определяется ее к. р. в B_p, и устанавливается неравенство

$$\|AV\|_{B_p} \leqslant M(p)\,\|f\|_{B_p} \tag{5.10}$$

для ее решений, откуда следует позитивность A. Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 5.2. *Пусть задача* (5.3) *к. р. в B_p при некотором $1<p_0<+\infty$. Тогда она к. р. в B_p при любых $1<p<+\infty$.*

Теорема 5.3. *Пусть E — гильбертово, и A — позитивен. Тогда* (5.3) *к. р. в B_2.*

Для решений задачи (5.1) справедлива формула (5.7). Поэтому задача (5.2) к. р. в B_p, если и только если V_0 и V_1 входят в банахово пространство $E_{\alpha,1/2}=E_\alpha\left[D\left(A^{\frac{1}{2}}\right), A^{\frac{1}{2}}\right]$ с нормой

$$\|V\|_{E_{\alpha,1/2}} = \left(\int_0^{\infty}\|\sqrt{A}\exp(-t\sqrt{A})V\|_{D(\sqrt{A})}^{1/(1-\alpha)}dt\right)^{1-\alpha} = \\ = \left(\int_0^{+\infty}\|A\exp(-t\sqrt{A})V\|_E^{1/(1-\alpha)}dt\right)^{1-\alpha} \tag{5.11}$$

Теорема 5.4. *Пусть A позитивен, $f(t) \in B_p$ и V_0, $V_1 \in E_{1-1/p,\,1/2}$. Тогда формула* (5.7) *определяет непрерывную на* [0, 1] *функцию со значениями в $E_{1-1/p,\,1/2}$, и*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| V(t) \|_{E_{1-1/p,1/2}} \leqslant [p^2 (p-1)^{-1} \| f \|_{B_p} + \| V_0 \|_{E_{1-1/p,1/2}} + \| V_1 \|_{E_{1-1/p,1/2}}]. \tag{5.12}$$

Неравенство (5.12) не коэрцитивно, но зато оно имеет место всегда. Наконец, из теорем 5.1 и 5.4 вытекает

Теорема 5.5. *В условиях теоремы* 5.2 *при любых $f(t) \in B_p$ и V_0, $V_1 \in E_{1-1/p,\,1/2}$ задача* (5.1) *имеет единственное решение в B_p и*

$$\| AV \|_{B_p} + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| V(t) \|_{E_{1-1/p,1/2}} \leqslant M [p^2 (p-1) \| f \|_{B_p} + \| V_0 \|_{E_{1-1/p,1/2}} + \| V_1 \|_{E_{-1/p,1/2}}]. \tag{5.13}$$

Часть приведенных здесь результатов установлена в [27, 28].

§ 6. Корректная разрешимость разностной краевой задачи

6.1. Разностная краевая задача. Дифференциальной задаче (5.1) сопоставим разностную задачу

$$-(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})(\Delta t)^{-2} + Au_i = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{6.1}$$

Здесь u_0, u_N, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}$ — заданные, а $u_1, \ldots, u_{N-1}$ — искомые элементы E. Наряду с (6.1) рассмотрим также частные задачи

$$-(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \cdot (\Delta t)^{-2} + Au_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N-1; \tag{6.2}$$

$$-(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \cdot (\Delta t)^{-2} + Au_i = \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \qquad u_0 = u_N = 0. \tag{6.3}$$

Разностное уравнение (6.1), аналогично дифференциальному, расщепляется на систему уравнений первого порядка

$$(u_{i+1}-u_i)(\Delta t)^{-1}-Bu_{i+1}=w_{i+1},\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1;$$
$$-(w_{i+1}-w_i)(\Delta t)^{-1}+Bw_i=(1+\Delta t\cdot B)\varphi_i,\ i=1,2,\ldots,N-1, \tag{6.4}$$

но не с оператором $\sqrt{A}$, а с более сложным оператором

$$B=B(\Delta t,\ A)=\frac{1}{2}\Delta tA+\sqrt{\frac{1}{4}(\Delta tA)^2+A}. \tag{6.5}$$

Из (6.4) следует формула

$$u_i=[1-R_B(2N)]^{-1}\{[R_B(i)-R_B(2N-i)](u_0+$$
$$+B^{-1}(1+\Delta t\,B)(2+\Delta tB)^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}R_B(k)\,\varphi_k\Delta t+[R_B(N-1)-$$
$$-R_B(N-k)]\left[u_N+B^{-1}(1+\Delta t\,B)(2+\Delta tB)^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}R_B(N-\right.$$
$$\left.-k)\,\varphi_k\Delta t\right]\}-B^{-1}(1+\Delta tB)(2+\Delta t\cdot B)^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}R_B(|i-$$
$$-k|)\,\varphi_k\Delta t,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1. \tag{6.6}$$

Чтобы обосновать этот формальный вывод, надо построить B, согласно (6.5), как функцию A, и получить нужные оценки резольвент B. Оказывается, при определенных условиях $B(\Delta t,\ A)$ при $\Delta t>0$ ведет себя так же, как и $B(0,\ A)=\sqrt{A}$. Это показано в § 7.

6.2. Корректная разрешимость в $C_{01}^{\alpha}(\varepsilon)$. Задача (6.1) ((6.2) и (6.3)) порождает операторную задачу в пространстве $E(\Delta t)$ векторов $\bar{\varphi}(\Delta t)=(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{N-1})$ и в пространстве ε. Далее вводятся банаховы пространства $C(\Delta t)$, $C_{01}^{\alpha}(\Delta t)$ с нормой

$$\|\bar{\varphi}(\Delta t)\|_{C_{01}^{\alpha}(\Delta t)}=\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}\|\varphi_i\|_E+\max_{1\leqslant i<j\leqslant N-1}\|\varphi_j-\varphi_i\|_E\,[(j-$$
$$-i)\,\Delta t]^{-\alpha}(i\Delta t)^{\alpha}(1-j\Delta t)^{\alpha},\qquad 0<\alpha<1, \tag{6.7}$$

$B_p(\Delta t)$, $1<p<+\infty$, и соответствующие им пространства $C(\varepsilon)$, $C_{01}^{\alpha}(\varepsilon)$ и $B_p(\varepsilon)$. Определяется к. р. разностных задач в этих пространствах и показывается, что необходимым условием к. р. является позитивность A. Доказать, что позитивность A является также достаточным условием к. р., пока не удалось. Рассмотрим сначала пространство $C_{01}^{\alpha}(\varepsilon)$. Справедлива

Теорема 6.1. *Пусть $-A$ — производящий оператор аналитической экспоненциально убывающей полугруппы, $\varphi \in C_{01}^{\alpha}(\varepsilon)$ и u_0, $u_N \in D(A)$. Тогда справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\| A\bar{u} \|_{C_{01}^{\alpha}(\varepsilon)} \leqslant M \alpha^{-1} [(1-\alpha)^{-1} \| \bar{\varphi} \|_{C_{01}^{\alpha}(\varepsilon)} + \| Au_0 \|_E + \| Au_N \|_E]. \tag{6.8}$$

Из (6.8) следует

Теорема 6.2. *В условиях теоремы 6.1 справедливо неравенство*

$$\| A\bar{u}(\Delta t) \|_{C(\Delta t)} \leqslant M \left[\ln \frac{1}{\Delta t} \| \bar{\varphi}(\Delta t) \|_{C(\Delta t)} + \| Au_0 \|_E + \| Au_N \|_E \right] \tag{6.9}$$

при достаточно малом $(\Delta t)_0$ и всех $0 < \Delta t \leqslant (\Delta t)_0$.

6.3. Корректная разрешимость в $B_p(\varepsilon)$. Во-первых, для решений задачи (6.3) справедливы следующие две теоремы.

Теорема 6.3. *Пусть задача (6.3) к. р. в $B_{p_0}(\varepsilon)$ при некотором $1 < p_0 < +\infty$, и $-A$ — производящий оператор аналитической экспоненциально убывающей полугруппы. Тогда задача (6.3) к. р. в $B_p(\varepsilon)$ при любых $1 < p < +\infty$ и*

$$\| A\bar{u} \|_{B_p(\varepsilon)} \leqslant M p^2 (p-1)^{-1} \| \bar{\varphi} \|_{B_p(\varepsilon)}. \tag{6.10}$$

Теорема 6.4. *Пусть E — гильбертово, и A только позитивен. Тогда задача (6.3) к. р. в $B_2(\varepsilon)$.*

Из приводимых ниже оценок резольвент B и формулы (6.6) следует, что задача (6.2) к. р. в $B_p(\varepsilon)$, если и только если граничные элементы u_0 и u_N входят в банахово пространство $\tilde{E}_{\alpha, 1/2}$ при $\alpha = 1 - 1/p$ с нормой

$$\| u \|_{\tilde{E}_{\alpha,1/2}} = \sup_{0 < \Delta t \leqslant (\Delta t)_0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \| AR_B(i) u \|_E^{1/(1-\alpha)} \Delta t \right)^{1-\alpha}. \tag{6.11}$$

Теорема 6.5. *Пространства $\tilde{E}_{\alpha, 1/2}$ и $E_{\alpha, 1/2}$ совпадают, причем*

$$(1-\alpha)\alpha \| u \|_{\tilde{E}_{\alpha,1/2}} \leqslant \| u \|_{E_{\alpha,1/2}} \leqslant \| u \|_{\tilde{E}_{\alpha,1/2}} \quad (u \in E_{\alpha,1/2}). \tag{6.12}$$

Теорема 6.6. *Пусть* $\overline{\varphi} \in B_p(\varepsilon)$ *и* u_0, $u_N \in E_{1-1/p,\,1/2}$. *Тогда формула* (6.6) *определяет элемент* $\overline{u} \in C(\varepsilon_{1-1/p,\,1/2})$, *и*

$$\|\overline{u}\|_{C(\varepsilon_{1-1/p,1/2})} \leqslant M\,[p^3(p-1)^{-1}\|\overline{\varphi}\|_{B_p(\varepsilon)} + \|u_0\|_{E_{1-1/p,1/2}} + \\ + \|u_N\|_{E_{1-1/p,1/2}}. \tag{6.13}$$

Здесь $C(\varepsilon_{\alpha,\,1/2})$ означает пространство C, построенное по $E_{\alpha,\,1/2}$. Хотя неравенство (6.12) и некоэрцитивно, но оно имеет место всегда. Если E — гильбертово, то в условиях теоремы 6.6 имеет место неравенство

$$\|u\|_{C(\varepsilon_{1-1/p,1/2})} \leqslant M\,[p^2(p-1)^{-1}\|\overline{\varphi}\|_{B_p(\varepsilon)} + \|u_0\|_{E_{1-1/p,1/2}} + \\ + \|u_N\|_{E_{1-1/p,1/2}}. \tag{6.14}$$

Неравенства (6.10), (6.13), (6.14) позволяют получить неравенство коэрцитивности для решений общей задачи (6.1).

§ 7. Корректная разрешимость краевой задачи в $C_{01}^{\alpha}(\varepsilon)$

7.1. Исследование резольвенты B. От B удобнее перейти к оператору $B_1 = 1/2A_1 + \sqrt{1/4\cdot A_1^2 + A_1}$, $A_1 = (\Delta t)^2 A$. Так как B_1 не ограничен, то удобно его определить через резольвенту, которую можно задать с помощью формулы Коши — Рисса с контуром, лежащим в S_ε и охватывающим неположительную действительную полуось. Продеформировав контур к этой оси, получим

$$(\lambda + B_1)^{-1} = \int_0^4 M_1(\lambda, \rho)(\rho + A_1)^{-1} d\rho, \quad M_1(\lambda, \rho) = \\ = \sqrt{\rho(4-\rho)}\,(\lambda^2 - \lambda\rho + \rho)^{-1}. \tag{7.1}$$

Так как $M_1(\lambda, \rho) \geqslant 0$ при $\lambda \geqslant 0$, $0 \leqslant \rho \leqslant 4$, то отсюда можно получить оценку резольвенты B. Действительно, так как A позитивен, то

$$\|(\rho + A)^{-1}\|_{E\to E} \leqslant M(\rho + a)^{-1}, \ a > 0,$$

и поэтому

$$\|(\rho+A_1)^{-1}\|_{E\to E}\leqslant M(\rho+a_1)^{-1},\ a_1=(\Delta t)^2 a.$$

Следовательно,

$$\|[\lambda+B_1(A_1)]^{-1}\|_{E\to E}\leqslant M[\lambda+B_1(a_1)]^{-1},\quad B_1(a_1)=$$
$$=1/2\cdot a_1+\sqrt{1/4\cdot a_1^2+a_1}>0, \tag{7.2}$$

т. е. B_1 позитивен.

7.2. Исследование степеней резольвенты B_1. Как и выше, можно получить формулы для операторов $(\lambda+B_1)^{-i}$ с ядром $M_i(\lambda,\rho)$, которые при $i>1$ обязательно будут менять знак, и поэтому примененный выше трюк для оценки норм не проходит. Так как $\exp(-tA)$ экспоненциально убывающая полугруппа, то, в силу (2.9), получим, что

$$(\lambda+B_1)^{-i}=\int_0^\infty L_i(\lambda,t)\exp(-tA_1)\,dt,$$

$$L_i(\lambda,t)=\int_0^4 M_i(\lambda,p)\exp(-t\rho)\,d\rho. \tag{7.3}$$

Если A_1 — комплексное число, и $\operatorname{Re}A_1>0$, то $[\lambda+B_1(A_1)]^{-i}$ — преобразование Лапласа функции $L_i(\lambda,t)$. Так как $[\lambda+B_1(A_1)]^{-i}$ — степень $[\lambda+B_1(A_1)]^{-1}$, то $L_i(\lambda,t)$ — свертка i штук $L_1(\lambda,t)$. Наконец, так как $M_1(\lambda,\rho)\geqslant 0$, то $L_1(\lambda,t)\geqslant 0$, и поэтому $L_i(\lambda,t)\geqslant 0$. Следовательно, из оценки

$$\|\exp(-tA_1)\|_{E\to E}\leqslant M\exp(-ta_1),\ a_1=(\Delta t)^2 a,\ a>0$$

вытекает, что

$$\|[\lambda+B_1(A_1)]^{-i}\|_{E\to E}\leqslant M[\lambda+B_1(a_1)]^{-i}. \tag{7.4}$$

Поэтому $-B_1$ — производящий оператор сильно непрерывной экспоненциально убывающей полугруппы.

7.3. Исследование операторов $A_1(\lambda+B_1)^{-i}$. Рассмотрим вначале $A_1^\alpha(\lambda+B_1)^{-i}$ при $0<\alpha<1$. В силу (7.3) и формулы ([23])

$$A^{-\beta}=[\Gamma(\beta)]^{-1}\int_0^\infty z^{\beta-1}\exp(-zA)\,dz\quad(\beta>0) \tag{7.5}$$

будем иметь

$$A_1^\alpha (\lambda + B_1)^{-i} u = \int_0^\infty \int_0^\infty L_i (\lambda, t) A_1 \exp[-(t+z) A_1] u dz dt$$

$$(u \in D(A)).$$

Воспользовавшись оценкой $\|tA \exp(-tA)\|_{E\to E} \leqslant$ $\leqslant M \exp(-ta)$ и формулой (см. [23])

$$A^{-\beta} = [\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)]^{-1} \int_0^\infty z^{-\beta} (z+A)^{-1} dz \quad (0 < \beta < 1) \tag{7.6}$$

для $A = t$, получим отсюда в силу (7.3) и (7.5)

$$\|A_1^\alpha (\lambda + B_1)^{-i}\|_{E\to E} \leqslant M \int_0^\infty L_i (\lambda, t) \Gamma(\alpha) t^{-\alpha} \exp(-a_1 t) dt =$$

$$= M\Gamma(\alpha) \int_0^4 M_i (\lambda, \rho) \int_0^\infty t^{-\alpha} \exp[-(\rho + a_1) t] dt d\rho =$$

$$= M\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \int_0^4 M_i (\lambda, \rho) (\rho + a_1)^{\alpha-1} d\rho.$$

Наконец, из (7.6) и (7.3) следует

$$\| A_1^\alpha (\lambda + B_1)^{-i}\|_{E\to E} \leqslant M \int_0^\infty z^{\alpha-1} [\lambda + B_1 (z + a_1]^{-i} dz.$$

Предельным переходом отсюда выводится оценка

$$\|A_1 (\lambda + B_1)^{-i}\|_{E\to E} \leqslant M \int_0^\infty [\lambda + B_1 (z + a_1)]^{-i} dz. \tag{7.7}$$

7.4. Исследование формулы (6.6). Из (7.4) и (7.2) следует

$$\|R_B(i)\|_{E\to E} \leqslant M (1 + \Delta t \sqrt{a})^{-i}.$$

Далее, если ввести в E новую эквивалентную норму

$$\|u\|_1 = \sup_{t \geqslant 0} \|\exp(-tA) u\|_E,$$

то в (7.4) можно положить $M = 1$. Поэтому операторы

$[1-R_B(2N)]^{-1}$ существуют и ограничены. Наконец, из (7.7) вытекает, что

$$\|A_1(1+B_1)^{-i}\|_{E\to E}\leqslant 2M[i^2-1]^{-1},\ i>1.$$

Воспользовавшись тождеством $A_1=B_1^2(1+B_1)^{-1}$ и применив неравенство моментов [23, с. 156], получим отсюда оценку

$$\|iB_1(1+B_1)^{-i}\|_{E\to E}\leqslant M\quad (i\geqslant 1).$$

Итак, установлены оценки операторов $R_B(i)$, позволяющие применить развитую в § 3 теорию и доказать теорему 6.1.

§ 8. Корректная разрешимость краевой задачи в $B_p(\varepsilon)$

8.1. Исследование задачи 6.3 опирается на экстраполяционную теорему 4.1 и оценки $R_B(i)$, приведенные в § 7. Так как при доказательстве теоремы 6.4 методом Фурье не приходится вводить B, то от A требуется лишь позитивность.

8.2. Пространства $E_{\alpha,1/2}$. Из оценок (1.4) и (1.7) (с заменой E на $D(A^{1/2})$ и A на $A^{1/2}$) вытекают непрерывные вложения $D(A)\subset E_{\alpha,1/2}\subset D(A^{1/2})$. Из обратного неравенства моментов [29] и теоремы 4.2 вытекает

Теорема 8.1. *Пусть выполнено* (4.1) *при некотором* $\alpha\in(1/2,1)$. *Тогда при* $0<\varepsilon<\min(2\alpha-1,\ 2-2\alpha)$ *пространство* $E_{2\alpha-1+\varepsilon,1/2}$ *непрерывно вложено в* F, *и*

$$\|u\|_F\leqslant M\varepsilon^{1-2\alpha}\|u\|^{1/2}_{E_{2\alpha-1+\varepsilon,1/2}}\|u\|^{1/2}_{E_{2\alpha-1-\varepsilon,1/2}}.$$

Введем банахово пространство $E_{\alpha,\surd}$ с нормой

$$\|u\|_{E_{\alpha,\surd}}=\left(\int_0^\infty\|A\exp(-tA)u\|_E^{1/(1-\alpha)}t^{-1/2}dt\right)^{1-\alpha}.$$

Теорема 8.2. $E_{\alpha,\surd}=E_{\alpha,1/2}$ *и*

$$M_1\|u\|_{E_{\alpha,1/2}}\leqslant\|u\|_{E_{\alpha,\surd}}\leqslant M_2\alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|u\|_{E_{\alpha,1/2}}.$$

Докажем лишь используемое ниже непрерывное вложение в $E_{\alpha,1/2}$. Для этого нужно воспользоваться интегральным представлением [30]

$$\exp\left(-t\sqrt{A}\right)=\int\limits_0^\infty f_{1,1/2}(\tau)\exp(-\tau t^2 A)\,d\tau,\quad f_{t,1/2}(\tau)=$$

$$=(2\pi i)^{-1}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\exp\left(z\tau-tz^{1/2}\right)dz\geqslant 0$$

и интегральным неравенством Минковского.

Введем банахово пространство $\tilde{E}_{\alpha,\sqrt{}}$ с нормой

$$\|u\|_{\tilde{E}_{\alpha,\sqrt{}}}=\left(\int\limits_0^\infty\left\|\sqrt{t}A^{3/2}\exp(-tA)\,u\right\|^{1/(1-\alpha)}\cdot dt\right)^{1-\alpha}.$$

Теорема 8.3. *Пространства* $\tilde{E}_{\alpha,\sqrt{}}$ *и* $E_{\alpha,\sqrt{}}$ *совпадают, и*

$$M_1\|u\|_{\tilde{E}_{\alpha,\sqrt{}}}\leqslant\|u\|_{E_{\alpha,\sqrt{}}}\leqslant M_2(1-\alpha)^{-1}\|u\|_{\tilde{E}_{\alpha,\sqrt{}}}.$$

Докажем лишь используемое ниже непрерывное вложение $\tilde{E}_{\alpha,\sqrt{}}\subset E_{\alpha,\sqrt{}}$. Для этого нужно воспользоваться интегральным представлением

$$u=\int\limits_0^\infty tA^2\exp(-tA)\,u\,dt$$

и интегральным неравенством Минковского.

Перейдем к доказательству теоремы 6.5. Из (7.3) и неравенства Гельдера следует, что

$$\|AR_B(i)\,u\|_E^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant M^{\frac{1}{1-\alpha}}\int\limits_0^\infty L_i(1,t)$$

$$\|A\exp((-t/2)A_1)\,u\|_E^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\int\limits_0^\infty L_i(1,t)\exp((-t/2)\,a_1)\,dt\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}dt.$$

Далее, из (7.3) (для $A_1=a_1$) вытекает, что второй множитель справа $\leqslant 1$. Наконец, так как

$$\sum_{i=1}^\infty R_B(i)=B_1^{-1},$$

то из (7.1) и единственности преобразования Лапласа следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} L_i(1, t) = \int_0^4 \rho^{-1/2}(4-\rho)^{1/2}\exp(-t\rho)\,d\rho \leqslant Mt^{-1/2}.$$

Отсюда и из теоремы 8.2 вытекает левое неравенство для норм. Правое неравенство устанавливается предельным переходом.

8.3. Оценка в нормах следов. Решение разностной краевой задачи, задаваемое формулой (6.6), состоит из нескольких слагаемых, оценки которых аналогичны. Рассмотрим, например, при $i=1$ последнее слагаемое

$$z = z_1 + z_2 = B^{-1}(1+B_1)(2+B_1)^{-1}\varphi_1\Delta t + B^{-1}(2+ \\ + B_1)^{-1}\sum_{k=2}^{N-1} R_B(k-2)\,\varphi_k\Delta t.$$

В силу (7.2), оценка z_1 сводится к оценке $B^{-1}\varphi_1\Delta t$. Применив (1.7) и (7.3), получим

$$\|A\exp(-sA_1)\,z_1\|_E \leqslant M\Big\|\int_0^{\infty} L_1(0, t)(t+s)^{-1}dt\Big\|\,\|\varphi_1\|_E.$$

Здесь справа — оператор Гильберта, а для оценки нормы $L_1(0, t)$ нужно применить интегральное неравенство Минковского.

При оценке z_2 можно выделить B^{-1} и, аналогично § 7, получить интегральное представление

$$z_2 = B^{-1}\sum_{k=2}^{N-1}\int_0^{\infty}\widetilde{L}_{k-2}(t)\exp(-t\Delta t^2 A)\,\varphi_k\,dt\,\Delta t,$$
$$\widetilde{L}_{k-2}(t) \geqslant 0.$$

Элемент z_2 оценивается в норме $\widetilde{E}_{\alpha,\,\gamma}$. Воспользовавшись формулой

$$A^{1/2}B^{-1} = (2\pi)^{-1}\int_0^4 \tau^{1/2}(\tau + A_1)^{-1}d\tau,$$

получим, что $A^{1/2}B^{-1}$ равномерно (по Δt) ограничен. Поэтому

$$\|\sqrt{t}A^{3/2}\exp(-tA)z_2\|_E \leqslant M\sqrt{t(\Delta t)^{-1}}\times$$

$$\times\sum_{k=2}^{N-1}\int_0^\infty \widetilde{L}_{k-2}[\tau(\Delta t)^{-2}](\tau+t)^{-1}d\tau\,\|\varphi_k\|_E.$$

Наконец, воспользовавшись представлением $(t+\tau)^{-1}$ через экспоненту и формулами типа (7.3), получим неравенство

$$\|\sqrt{t}A^{3/2}\exp(-tA)z_2\|_E \leqslant M\int_0^\infty \exp(-\tau)t^{-1/2}\times$$

$$\times\sum_{k=2}^{N-1}\{2+B[\tau(\Delta t)^2t^{-1}]\}^{-1}\{1+$$

$$+B[\tau(\Delta t)^2t^{-1}]\}^{2-k}\|\varphi_k\|^E\Delta t d\tau.$$

В силу неравенства Минковского нужная оценка вытекает из равномерной ограниченности оператора

$$z^{-1}\sum_{k=2}^{N-1}\{2+B[(\Delta t)^2z^{-2}]\}^{-1}\{1+B[(\Delta t)^2z^{-2}]\}^{2-k}\|\varphi_k\|_E\,\Delta t$$

как оператора из $B_p(\Delta t)$ в $B_p([0,+\infty),E)$.

8.4. Случай гильбертова пространства. Во-первых, показывается, что в условиях теоремы 6.3 справедливо неравенство

$$\|\sqrt{A}\cdot\frac{\Delta}{\Delta t}\bar{u}\|_{B_p(\varepsilon)} \leqslant Mp^2(p-1)^{-1}\|\bar{\varphi}\|_{B_p(\varepsilon)}.$$

Это позволяет свести исследование к случаю уравнения первого порядка в $D(A^{1/2})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nitsche J., Nitsche J. C. C.** Error estimates for the numerical solution of elliptic differential equations.—„Arch. Rational Mech. and Analysis", 1960, v. 5, N 4, p. 293—306.
2. **Андреев В. Б.** О равномерной сходимости некоторых разностных схем.— «Журн. вычислит. математики и мат. физики», 1966, т. 6, № 2, с. 238—250.

3. **Дьяконов Е. Г.** О сходимости одного итерационного процесса.— «Усп. мат. наук», 1966, т. 21, № 1, с. 179—182.
4. **Соболевский П. Е., Тиунчик М. Ф.** Об одном принципе сравнения в теории приближенных методов.— В кн.: Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов. Киев, 1969, с. 135—145. (Труды симпозиума, ч. 5).
5. **Соболевский П. Е., Тиунчик М. Ф.** О разностном методе приближенного решения эллиптических уравнений. Воронеж, 1970, с. 117—127. (Труды математического факультета ВГУ, вып. 4).
6. **Соболевский П. Е., Тиунчик М. Ф.** Об угле между параболическими операторами. Воронеж, 1971, с. 103—113. (Труды математического факультета ВГУ, вып. 5).
7. **Гриф А. Г.** Об устойчивости в $W_2^{2,1}$ разностных схем для параболических уравнений.— В кн.: Исследования по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений. М., МГУ, 1973, с. 88—112.
8. **Франк С. Л.** Разностные операторы в свертках.— «Докл. АН СССР», 1968, т. 181, № 2, с. 286—289.
9. **Франк С. Л.** Коэрцитивные краевые задачи для разностных операторов.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, № 1, с. 42—45.
10. **Мокин Ю. И., Лазаров Р. Д.** К устойчивости эллиптических разностных задач.— «Журн. вычислит. математики и мат. физики», 1973, т. 13, № 2, с. 488—493.
11. **Мокин Ю. И., Лазаров Р. Д.** Устойчивость эллиптических разностных схем в метриках $L_{p,\,h}$.— В кн.: Исследования по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений. М., МГУ, 1973, с. 40—87.
12. **Ионкин Н. И., Мокин Ю. И.** О параболичности разностных схем.— «Журн. вычислит. математики и мат. физики», 1974, т. 14, № 2, с. 402—417.
13. **Соболевский П. Е.** О коэрцитивной разрешимости разностных уравнений.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 205, № 5, с. 1063—1066.
14. **Примакова С. И., Соболевский П. Е.** О коэрцитивной разрешимости разностного аналога первой краевой задачи для эллиптических уравнений четвертого порядка. Воронеж, 1973, с. 57—74. (Труды математического факультета ВГУ, вып. 11).
15. **Примакова С. И., Соболевский П. Е.** О коэрцитивной разрешимости разностных уравнений четвертого порядка.— «Дифференц. уравнения», 1974, т. 10, № 9, с. 1699—1713.
16. **Примаков С. И.** О коэрцитивной разрешимости разностных параболических уравнений в пространствах Гельдера.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, «Наука», 1973, с. 176—179.
17. **Полична А. Е., Соболевский П. Е.** О коэрцитивной разрешимости разностных параболических уравнений в пространствах Бохнера.— В кн.: Труды НИИМ ВГУ, 1974, вып. 12, с. 75—81.
18. **Полична А. Е., Соболевский П. Е.** О корректной разрешимости разностных параболических уравнений в пространствах Бохнера. В печати.
19. **Полична А. Е., Соболевский П. Е.** Новые L_p оценки для разностных параболических задач.— «Журнал вычислит. математики и мат. физики», 1976, т. 16, № 5, с. 1155—1163.

20. **Поличка А. Е., Соболевский П. Е.** О методе Роте приближенного решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с переменным неограниченным оператором.— «Дифференц. уравнения», 1976, т. 12, № 9, с. 1693—1704.
21. **Поличка А. Е., Соболевский П. Е.** Корректная разрешимость разностной краевой задачи в пространствах Бохнера.— «Укр. мат. журн.», 1976, т. 28, № 4, с. 511—523.
22. **Поличка А. Е., Соболевский П. Е.** Оценка решений разностной краевой задачи в норме пространства «следов» решений дифференциальной задачи.— В кн.: Труды НИИМ ВГУ. Воронеж (в печати).
23. **Крейн С. Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967. 464 с.
24. **Соболевский П. Е.** Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений.— «Докл. АН СССР», 1964, т. 157, № 1, с. 52—55.
25. **Benedek A., Calderon A. P., Pansore R.** Convolytion operators on Banach valued functions.— "Proc. Nat. Acad. Sci. USA", 1962, v. 48, N 3, p. 356—365.
26. **Соболевский П. Е.** О дробных нормах в банаховом пространстве, порожденных неограниченным оператором.— «Усп. мат. наук», 1964, т. 19, № 6, с. 219—222.
27. **Соболевский П. Е.** Об эллиптических уравнениях в банаховом пространстве.— «Дифференц. уравнения», 1969, т. 4, № 7, с. 1346—1348.
28. **Орлов В. П., Соболевский П. Е.** Коэрцитивная разрешимость вырождающихся эллиптических и параболических уравнений с неограниченным операторным коэффициентом.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, «Наука», 1973, с. 146—150.
29. **Соболевский П. Е.** О дробных степенях позитивных операторов.— «Докл. АН СССР», 1965, т. 166, № 6, с. 357—361.
30. **Иосида К.** Функциональный анализ. М., «Мир», 1967, 624 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ответственный редактор
Глеб Павлович Акилов

Редактор *Л. В. Шалина*
Художественный редактор *Т. Ф. Каминина*
Художник *В. В. Растегаев*
Технический редактор *Н. М. Бурлаченко*
Корректоры *Н. Г. Примогенова, А. В. Ноллетова*

Сдано в набор 4 января 1977 г. Подписано в печать 15 августа 1977 г. МН 02061. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага типографская № 3. 10,75 печ. л., 18,1 усл.-печ. л., 18,4 уч.-изд. л. Тираж 2850 экз. Заказ 404. Цена 2 р. 10 к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

УДК 517.948 : 513.8

Некоторые задачи теории упорядоченных векторных пространств. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 6—19.

Дается обзор важнейших новых идей и результатов в области продолжения линейных операторов, теории сублинейных операторов и теории Шоке в упорядоченных векторных пространствах.
Библ. 7 назв.

УДК 519.4

Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С., Ус Г. Ф. «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 20—41.

Обзор результатов по спектральной теории самосопряженных операторов в пространствах функций бесконечного числа переменных. Исследуются вопросы построения разложений по обобщенным собственным векторам бесконечных семейств коммутирующих самосопряженных операторов и конструирования пространств функций бесконечного числа переменных как бесконечных тензорных произведений. Даны приложения к операторам с разделяющимися переменными и их возмущениям, а также к обобщенной проблеме моментов.
Библ. 44 назв.

УДК 519.4

Применение интерполяционных методов к оценкам спектра интегральных операторов. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 42—70.

Дается описание современного состояния вопроса о поведении сингулярных чисел интегрального оператора в зависимости от гладкости ядра.
Библ. 22 назв.

УДК 517.948 : 513.8

Представления линейных функционалов и операторов на векторных решетках и некоторые приложения этих представлений. Бухвалов А. В., $\boxed{\text{Лозановский Г. Я.}}$ «Теория операторов в функциональных пространствах, Новосибирск, «Наука», 1977, с. 71—98.

Дается подробный обзор и изложение новейших результатов по проблеме аналитического представления функционалов и операторов на широком классе пространств измеримых функций, охватывающем как классическую шкалу Лебега, так и пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича и т. п. Особое внимание уделено изложению окончательных результатов по проблеме описания интегральных операторов.
Библ. 58 назв.

УДК 519.4

Эволюционные представления алгебр обобщенных функций. Вувуникян Ю. М. «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 99—120.

Вводится общее понятие эволюционного представления алгебры обобщенных функций в локально выпуклом пространстве. С помощью разрабатываемого аппарата асимптотической резольвенты оператора доказывается теорема порождения эволюционного представления алгебры основных функций.

Библ. 17 назв.

УДК 519.4

Полугруппы линейных операторов в локально выпуклом пространстве. Иванов В. В. «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 121—153.

Строится аппарат для исследования общих полугрупп линейных операторов в локально выпуклых пространствах. Решаются вопросы порождения для широких классов полугрупп. Исследуются сопряженные полугруппы операторов.

Библ. 15 назв.

УДК 517.948 : 513.8

Универсальные пространства Банаха. Кадец М. И. «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 154—166.

Впервые дается обзор результатов последнего десятилетия в области универсальных нормированных пространств. Особое внимание уделено связям между универсальностью и аппроксимационными свойствами банахова пространства.

Библ. 24 назв.

УДК 519.4

Операторы гистерезисных нелинейностей. Красносельский М. А., Покровский А. В. «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 167—187.

Излагается новый подход к изучению нелинейностей гистерезисного типа. Особое внимание, уделено блок-схемам гистеронов и методам анализа уравнений с разрывными нелинейностями.

Илл. 5, библ. 26 назв.

УДК 519.4

Интерполяция линейных операторов в пространствах гладких функций. Крейн С. Г. «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 188—205.

Дается описание схемы, по которой строятся пространства, промежуточные между банаховым пространством и областью определения действующего в нем неограниченного линейного оператора.

Библ. 20 назв.

УДК 519.4

Некоторые свойства операторных идеалов, образуемых с помощью обобщенных s-чисел. **Макаров Б. М., Фатхи Нашат Фарид Мухамед.** «Теория операторов в функциональных пространствах», Новосибирск, «Наука», 1977, с. 206—211.

Изучается зависимость операторных идеалов от так называемых специальных пространств последовательностей, по которым эти идеалы строятся.
Библ. 8 назв.

УДК 517.948 : 513.8

Геометрия линейных пространств и линейных операторов. **Митягин Б. С.** «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 212—239.

Обзор посвящен широкому комплексу проблем в области локально выпуклых пространств Фреше. Особое внимание уделено изложению результатов по проблеме Гротендика, орицательно решенной автором и Зобиным и новым результатам в теории абсолютно суммирующих и интегральных операторов, приводящих к ряду фактов в изоморфной теории конкретных функциональных пространств.
Библ. 48 назв.

УДК 519.4

Современное состояние проблемы спектрального анализа-синтеза. I. **Никольский Н. К.** «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 240—282.

Дается обстоятельный обзор современного состояния проблемы спектрального анализа-синтеза. Обсуждаются вопросы спектрального синтеза операторов в банаховых и гильбертовых пространствах, анализа-синтеза идеалов в пространствах аналитических функций. Затрагивается также дифференциально-разностная интерпретация проблемы анализа-синтеза.
Библ. 66 назв.

УДК 517.948 : 513.8

Операторы типа RN и аналитические представления линейных операторов. Рейнов О. И. «Теория операторов в функциональных пространствах», Новосибирск, «Наука», 1977, с. 283—295.

Излагаются вопросы характеризации операторов типа Родона — Никодима, действующих между банаховыми пространствами и решетками измеримых функций.
Библ. 13 назв.

УДК 517.948 : 513.8

Супремальные генераторы в упорядоченных векторных пространствах. **Рутковский Н. В.** «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск, «Наука», 1977, с. 296—303.

Излагаются новые результаты, связанные с проблемами порождения упорядоченных векторных пространств с помощью операции взятия супремума и с двойственными к ним проблемами топологической классификации компактов.
Библ. 5 назв.

УДК 519.4

Теория полугрупп и устойчивость разностных схем. **С о б о л е в с к и й П. Е.** «Теория операторов в функциональных пространствах». Новосибирск. «Наука», 1977, с. 304—337.

Обзор цикла работ по применению теории полугрупп операторов к исследованию разностных схем для эволюционных уравнений. Установлены условия корректной разрешимости разностных задач Коши в разнообразных функциональных пространствах. Аналогичные результаты получены для разностных краевых задач. Особое внимание уделено связи корректной разрешимости с теорией аналитических полугрупп.

Библ. 30 назв.

2р.10к.